

На правах рукописи



Попов Андрей Игоревич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В МАТЕРИАЛАХ
С УПОРЯДОЧЕННОЙ МАКРОСТРУКТУРОЙ**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Самара 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет» на кафедре «Промышленная теплоэнергетика».

Научный руководитель: **Еремин Антон Владимирович**,
доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой
«Промышленная теплоэнергетика», проректор по
интеграционным проектам ФГБОУ ВО «Самарский
государственный технический университет»

Официальные оппоненты: **Просвиряков Евгений Юрьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры «Информационные технологии и системы
управления» Института радиоэлектроники и
информационных технологий ФГАОУ ВО «Уральский
федеральный университет имени первого Президента
России Б.Н. Ельцина»

Дмитриев Андрей Владимирович,
доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой
«Автоматизация технологических процессов и
производств» ФГБОУ ВО «Казанский государственный
энергетический университет»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова»

Защита состоится 27 июня 2024 г., в 10 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.377.02 на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, главный корпус, аудитория 200.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные гербовой печатью, просим направлять по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, главный корпус, ФГБОУ ВО «СамГТУ», ученому секретарю диссертационного совета 24.2.377.02; тел.: +7(846)337-04-43; e-mail: d24237702@samgtu.ru. В отзыве просим указывать почтовый адрес, номер телефона, электронную почту, наименование организации, должность, шифр и наименование научной специальности.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «СамГТУ» и на сайте диссертационного совета 24.2.377.02 <https://d24237702.samgtu.ru/>

Автореферат разослан «___» _____ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.377.02,
к.ф.-м.н., доцент



М.Н. Саушкин.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Математическое моделирование процессов тепломассообмена в технических системах является важной научно-технической задачей. Проектирование современного теплотехнического оборудования, тепловой защиты зданий и сооружений невозможно без корректного описания процессов переноса тепла и массы в твердых телах и жидкостях. Особый интерес представляют процессы переноса, протекающие в пористых материалах (композитах, пенах и др.), широко распространенных в космическом и авиационном машиностроении, энергетике, медицине и др.

Большая часть природных (пемзы, доломиты, грунты и др.) и искусственных (керамзит, аглопорит, шлаковая пемза и др.) пористых материалов имеют стохастическую структуру – неравномерный размер и характер распределения пор, существенно затрудняющий определение закономерностей переноса тепла и массы. В настоящее время в научной практике востребованным является особый вид пористых сред с «правильной» упорядоченной макроструктурой. К их числу относятся как среды с порами простой геометрической формы (шар, цилиндр), так и более сложные, пространственная структура которых образована развитыми топологическими объектами, в особенности, трижды периодическими минимальными поверхностями (ТПМП). Первые упоминания о «примитивных» минимальных поверхностях встречаются в научных работах Шварца, Шёна, Неовиуса и др., опубликованных в середине девятнадцатого века. Несмотря на преимущества (высокая объемная пористость, большая площадь рабочей поверхности, высокие прочностные характеристики) в сравнении с традиционными, пористые ТПМП-материалы широкого распространения не получили по причине сложности их изготовления и прогнозирования физических свойств. В настоящее время в связи с развитием аддитивных технологий, вычислительной техники, средств и методов моделирования стало возможным не только теоретическое исследование материалов на основе ТПМП, но и их прикладное использование, например, в качестве матриц катализаторов, теплообменных трактов ТМО-оборудования и др. Однако, одним из факторов, ограничивающих применение пористых ТПМП-материалов в технике, является отсутствие математического аппарата для описания процессов тепломассопереноса в них с учетом структурных характеристик пористой среды. В связи с этим тема настоящей диссертации, связанная с разработкой и развитием методов математического моделирования тепловых и гидродинамических процессов в пористых средах с упорядоченной макроструктурой, весьма актуальна.

Цель работы: разработка новых численно-аналитических методов математического моделирования процессов тепломассопереноса в пористых материалах с упорядоченной макроструктурой, которые, в отличие от известных, позволяют учитывать структурные характеристики среды.

Задачи исследования:

1. Разработать метод математического моделирования тепловых и гидродинамических процессов в пористых средах с упорядоченной макроструктурой на основе интерпретации данных натуральных и вычислительных экспериментов.

2. Разработать математические модели тепломассопереноса в гомогенизированных пористых средах с учетом геометрических характеристик исследуемых структур (толщины стенки ячейки, просветность и др.), сформулировать соответствующие краевые задачи и выполнить анализ их решений.

3. Решить краевую задачу теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине с помощью оригинального численно-аналитического метода, основанного на совместном использовании методов разделения переменных, коллокаций и ортогонального метода взвешенных невязок.

4. Решить задачу теплопроводности в бесконечно протяженной пористой пластине с равномерно распределенными внутренними источниками теплоты при помощи метода, основанного на совместном использовании метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса.

5. Разработать комплекс проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, реализующих примененные в диссертации численно-аналитический и приближенно аналитический методы решения краевых задач тепломассопереноса.

6. Разработать алгоритм реализации метода конечных элементов, основанный на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности. Применить разработанный алгоритм к решению задач теплопереноса на микро- и нано уровне в пористых материалах.

7. Провести численные эксперименты по определению температурных полей, контуров распределения скорости и давления при течении вязких жидкостей в пористых материалах с упорядоченной макроструктурой с использованием программных комплексов ANSYS¹ и MathCAD.

Тематика работы соответствует пунктам паспорта научной специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

¹Лицензия на использование ANSYS в ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» предоставлена в рамках договора ЕП127/21 от 4.10.2021 г.

1) Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений; 2) Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; 3) Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; 4) Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента; 5) Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их результатов, в том числе с применением современных компьютерных технологий.

Научная новизна:

1. Разработан метод математического моделирования процессов теплопереноса в пористых средах с топологией трижды периодических минимальных поверхностей, особенностью которого является использование оригинального способа вычислительной гомогенизации исследуемой области и определение эффективных коэффициентов переноса на основе интерпретации вычислительных и натуральных экспериментов.

2. Разработана новая математическая модель теплопроводности в пористых средах со структурой, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях, расширяющая возможности классической диффузионной модели и, по сравнению с известными моделями, позволяющая учитывать структурные характеристики трижды периодических минимальных поверхностей (размер элементарной ячейки, толщины стенки ячейки, пористость и т.д.).

3. На основе совместного использования метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок, а также удовлетворения дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля в заданном наборе точек пространственной переменной решена задача теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине. Особенность предложенного метода заключается в точном удовлетворении исходного дифференциального уравнения в отдельных точках пространственной переменной, что позволяет получать высокую точность решения при малом количестве приближений.

4. При помощи приближенного аналитического метода, основанного на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса, впервые решена задача теплопроводности в бесконечно протяженной пористой пластине с равномерно распределенными внутренними источниками теплоты.

5. Разработаны новые алгоритмы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, реализующих примененные в диссертации численно-аналитический и приближенно-аналитический методы в программной среде MathCAD.

6. Разработан новый алгоритм реализации метода конечных элементов, основанный на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности, для решения задач теплопереноса на микро- и нано уровне в пористых материалах.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод исследования тепловых и гидродинамических процессов в пористых средах с упорядоченной макроструктурой с использованием оригинального способа вычислительной гомогенизации исследуемой области и определения коэффициентов переноса на основе интерпретации вычислительных и натуральных экспериментов.

2. Новые математические модели тепломассопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой.

3. Результаты применения оригинального численно-аналитического метода, основанного на совместном применении метода разделения переменных, ортогональных методов взвешенных невязок и метода коллокаций, к решению задачи теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине.

4. Результаты применения оригинального приближенного аналитического метода, основанного на интегральном методе теплового баланса с введением дополнительной искомой функции, к решению задачи теплопроводности в бесконечно протяженной пористой ТПМП-пластине с равномерно распределенными внутренними источниками теплоты.

5. Комплекс проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, предназначенных для решения разработанных в диссертации задач тепло- и массопереноса в пористых телах с упорядоченной макроструктурой, с помощью предложенных численных и приближенно-аналитических методов.

6. Результаты разработки нового алгоритма применения метода конечных элементов, основанного на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности.

Достоверность результатов работы исследования подтверждается сопоставлением полученных данных с реальными теплофизическими процессами; сравнением численных решений, полученных в диссертации, с экспериментальными данными и результатами, опубликованными другими исследователями; непротиворечивостью полученных выводов классическим физическим законам и современным представлениям о механизмах переноса тепла и массы.

Практическая значимость работы заключается в разработке эффективных вычислительных методов определения температурных полей, контуров распределения скорости и давления в пористых материалах с упорядоченной макроструктурой. Разработанные в диссертации модели теплопереноса, а также полученные приближенные и численно-аналитические решения могут быть использованы при проектировании теплообменного оборудования, расчете тепловых потерь через ограждающие конструкции сооружений и в ряде других прикладных исследований.

Внедрение результатов работы. Результаты диссертационной работы частично используются в учебном процессе Самарского государственного технического университета в лекционных курсах для студентов бакалавриата направления подготовки 13.03.01. «Теплоэнергетика и теплотехника», а также в расчетной практике крупного промышленного предприятия ООО «ТСК Волгаэнергопром» (г. Самара) и ООО «Инженерное бюро Пульсар» (г. Самара).

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: Международная мультидисциплинарная конференция «FarEastCon», г. Владивосток, 2020, 2021 г.; Международная научно-техническая конференция «Промышленное производство и металлургия – ICIMM», г. Нижний Тагил, 2021 г.; Международная конференция «SUMMA», г. Липецк, 2020, 2021, 2022, 2023 г.; Международная научно-техническая конференция «Пром-Инжиниринг», г. Сочи, 2022 г.; Международная научно-техническая конференция «Энергетические системы», г. Белгород, 2019 г.; Международная научная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах», г. Самара, 2019 г. Также результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры «Промышленная теплоэнергетика» Самарского государственного технического университета в 2021-2023 гг.

Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-79-10044).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 21 печатной работе, из них 4 статьи в международных журналах, индексируемых в Scopus, 5 статей – в журналах из перечня ВАК, 12 статей в других изданиях; получены 8 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. В работах [1, 6, 8, 10, 15–18] диссертанту принадлежит постановка задач, непосредственное выполнение основного объема вычислительной работы, интерпретация результатов и формулировка выводов. В работах [2–5, 11–14], опубликованных в соавторстве, диссертанту в равной степени с другими авторами принадлежит получение решений, анализ и интерпретация результатов работы. В

работе [7] выполнен анализ результатов и определено влияние релаксационных слагаемых на температурный профиль в исследуемом объекте. В [9] диссертанту принадлежит постановка и проведение экспериментального исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка используемой литературы, приложений; изложена на 134 страницах основного машинописного текста и 4 страницах приложений, содержит 60 рисунков. Список использованной литературы включает 108 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, определена цель, сформулирована научная новизна, а также представлены положения, которые выносятся на защиту, показана практическая ценность полученных результатов и разработанных методов, приведена структура диссертации, сведения об апробации работы и публикациях.

В первой главе диссертации представлен анализ литературы по теме исследования. Отмечено, что известные модели теплопроводности (Максвелла, Брюггемана, Гамильтона-Кроссера, Айвазова-Домашнева, Эшби, Радаева Ю.Н., Ковалева В.А. и др.) и течения жидкости (Дарси, Форхгеймера, Бринкмана, Козени-Кармана, Эргуна и др.) в пористых средах не всегда согласуются между собой, а их точность существенно зависит от конфигурации порового пространства, формы пор и др. Показано, что для решения задач тепломассопереноса применяются различные аналитические, приближенные и численные методы. Отмечается, что в силу актуальности темы исследования существует необходимость развития существующих теоретических и прикладных подходов к описанию процессов переноса в пористых средах.

Вторая глава диссертации посвящена разработке методов математического моделирования теплопроводности в пористых средах с упорядоченной макроструктурой, в том числе в пористых материалах со структурой, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях (ТПМП), для получения простых по форме аналитических зависимостей, устанавливающих связь между теплофизическими свойствами исследуемых материалов и их геометрическими характеристиками.

Минимальная поверхность – это поверхность, в каждой точке которой средняя кривизна равна нулю. В случае, если поверхность периодична в трех ортогональных направлениях, ее называют трижды периодической. В рамках диссертационной работы рассматриваются четыре вида пористых ТПМП-материалов следующих типов (см. рис. 1): Шварца Primitive, Шёна I-WP, Неовиуса и TSC.

Твердотельная элементарная ячейка формируется путем построения двух эквидистант на расстоянии $\delta/2$ и $-\delta/2$ относительно исходной поверхности (рис. 2а) и заполнения пространства между эквидистантами веществом с заданными физическими свойствами. Пористый ТППП-материал образуется (рис. 2б) в результате транслярования элементарной ячейки вдоль трех взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат.

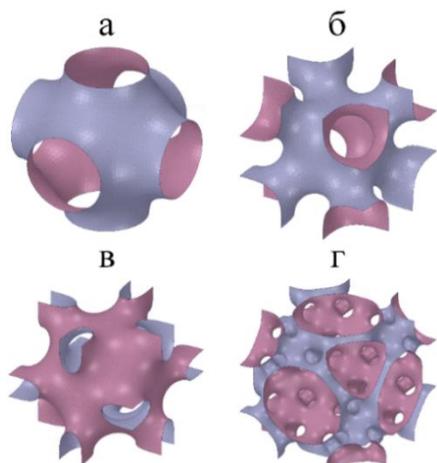


Рис. 1. Рассматриваемые в диссертации ТППП: а) Шварца Р; б) Шёна I-WP; в) Неовиуса; г) TSC

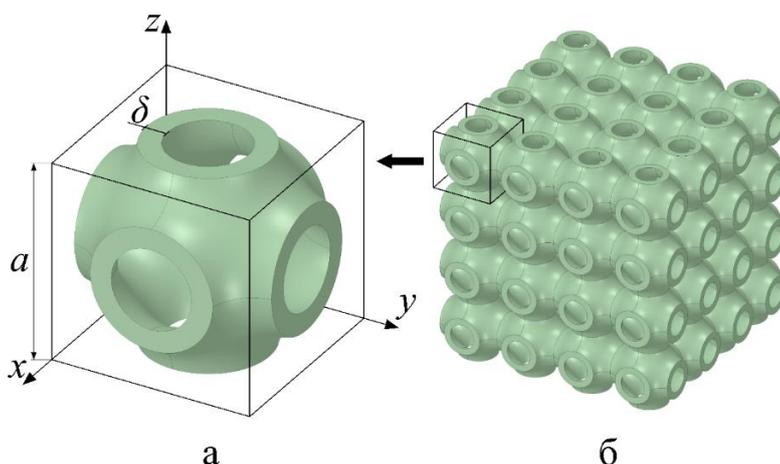


Рис. 2. Трижды периодическая минимальная поверхность Шварца Р: а) элементарная ячейка; б) пористый материал с упорядоченной структурой (решетка)

Прогнозирование тепловых свойств пористых материалов является важной задачей теоретической и прикладной теплофизики. Несмотря на упорядоченную макроструктуру тепловые свойства пористых ТППП-материалов не могут считаться изотропными. Значения коэффициентов переноса, характеризующих теплообмен, различны в различных точках среды и зависят от направления теплопереноса.

Закон Фурье в анизотропных средах в общем случае формулируется в виде

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (1)$$

где \mathbf{q} – вектор плотности теплового потока; $\lambda = [\lambda_{ij}]$ ($i, j = \overline{1,3}$) – симметричный тензор теплопроводности второго ранга; T – температура.

Поскольку теплопроводность λ является не скалярной величиной, а тензорной, тепловые потоки в каждой точке исследуемой области различны в различных направлениях. Однако в диссертации рассматривается метод осреднения теплофизических свойств в пределах исследуемого объема, согласно которому рассматривается не истинное значение теплопроводности λ , а некоторое осредненное – эффективный коэффициент теплопроводности $\lambda_{эфф}$, имеющий постоянное значение во всех точках пористой среды.

С целью осреднения свойств в диссертации используется метод RVE (representative volume element), согласно которому в пористых или композиционных материалах

можно выделить такой минимальный объем, который демонстрирует свойства (тепловые, механические, электромагнитные и др.), идентичные свойствам всего материала. В рассматриваемом пористом ТПМП-материале, основанном на ТПМП Шварца типа Р, элементарным объемом является куб, в который вписана элементарная ТПМП ячейка (см. рис. 3).

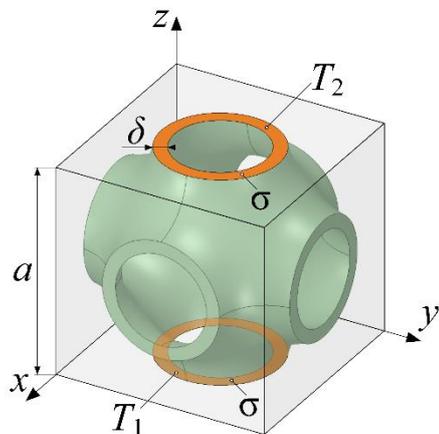


Рис. 3. Схема ячейки

Для определения тепловых характеристик элементарного объема будем считать, что теплофизические свойства в любой точке объема изотропны. То есть считаем, что исследуемый объем заполнен однородной средой с $\lambda_{эфф} = \text{const}$, где $\lambda_{эфф}$ – эффективный коэффициент теплопроводности. В случае, если перенос тепла осуществляется лишь вдоль оси z , тепловой поток Q через любое ортогональное сечение элементарного объема определяется как $Q = \overline{q}_S S$, где

$$\overline{q}_S = S^{-1} \int_{\sigma} q d\sigma, \quad (2)$$

\overline{q}_S – средняя плотность теплового потока в сечении $S = a^2$; q – фактическая плотность теплового потока в сечении $\sigma = S(1 - s)$; $s = S_l / S$ – просветность (отношение площади пор в сечении к общей площади сечения); S_l – площадь пор. В соотношении (2) и далее опущен нижний индекс « z », указывающий на то, что рассматривается z -компонента вектора плотности теплового потока q_z .

С другой стороны, согласно гипотезе Фурье $\overline{q}_S = -\lambda_{эфф} \partial T / \partial z$. При стационарном режиме переноса тепла распределение температуры в гомогенизированной среде вдоль координаты z изменяется по линейному закону. Тогда справедливо соотношение

$$\overline{q}_S = -\lambda_{эфф} (T_2 - T_1) / a, \quad (3)$$

где T_1, T_2 – граничные условия первого рода, представленные на рис. 3.

Учитывая, что $S = a^2$ из (2), (3) следует

$$\lambda_{эфф} = \overline{q}_S [a / (T_1 - T_2)] = \int_{\sigma} q d\sigma / a (T_1 - T_2). \quad (4)$$

Для определения фактического значения теплового потока в сечении, перпендикулярном оси z , используем структурную характеристику среды – просветность s . Очевидно, что средняя плотность теплового потока в любой точке сечения σ больше аналогичной величины в сечении S :

$$\overline{q_\sigma} = \overline{q_s} / (1 - s), \quad (5)$$

где $\overline{q_\sigma}$ – среднее значение плотности теплового потока в сечении σ .

Учитывая (5), эффективная теплопроводность определяется по формуле

$$\lambda_{эфф} = a \overline{q_\sigma} (1 - s) / (T_1 - T_2). \quad (6)$$

Величина $\overline{q_\sigma}$ определяется по результатам решения краевой задачи теплопроводности в элементарной ячейке методом конечных элементов в модуле Steady-State Thermal программного комплекса ANSYS. На рисунке 4 представлена конечно-элементная сетка для решения задачи.

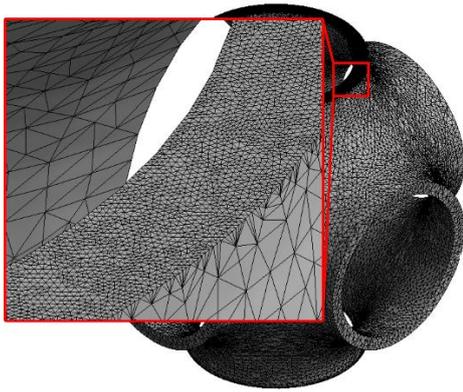


Рис. 4. Конечно-элементная сетка

Используя соотношение (6), определены значения коэффициентов эффективной теплопроводности для различных конфигураций элементарной ячейки. В частности, исследовано поведение функции $\lambda_{эфф}(a; \delta)$ при изменении ее аргументов – размера элементарной ячейки и ее толщины. Также в рассмотрение вводится величина, которая характеризует пористость исследуемого материала $\phi = V_{пор} / V_{пол}$, где $V_{пор}$ – объем пустот, а $V_{пол}$ – полный объем куба.

На рисунках 5 и 6 представлены графики зависимости эффективной теплопроводности от относительной толщины $\varphi = \delta / a$ и от пористости соответственно.

Наибольший интерес представляют линейные участки изменения $\lambda_{эфф}$, лежащие в диапазоне малых значений относительной толщины φ и пористости ϕ близкой к единице. Это связано с практическим интересом применения пористых ТПМП-материалов в качестве, например, тепловой изоляции, где важным параметром является низкая эффективная теплопроводность.

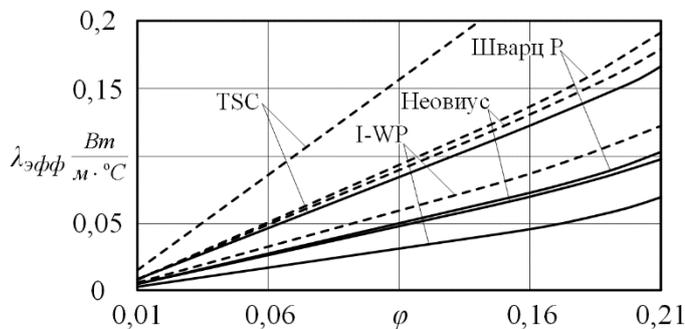


Рис. 5. График зависимости эффективной теплопроводности от относительной толщины:
 - - - - RHP; — — — — PETG

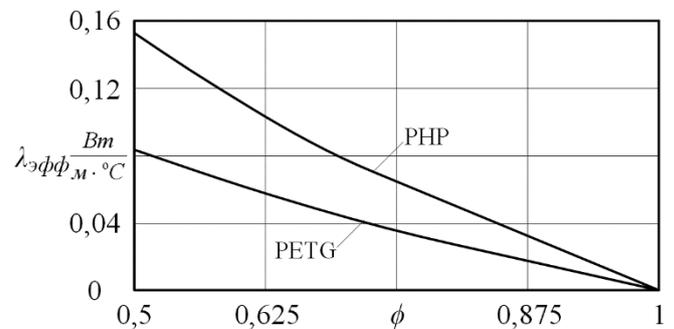


Рис. 6. График зависимости эффективной теплопроводности от пористости

Линейный диапазон $\lambda_{эфф}$ может быть аппроксимирован функцией вида

$$\lambda_{эфф} = \lambda_m [k_1(1 - \phi)] \quad (\phi_{лин} \leq \phi \leq 1); \quad (7) \quad \phi = 1 - k_2 \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_{лин}), \quad (8)$$

где k_1, k_2 – константы, которые зависят от типа ТПМП. Зависимости (7) и (8), полученные для одной элементарной ячейки, справедливы для всего пористого ТПМП-материала, состоящего из любого числа ячеек.

Зависимости (7) и (8) были верифицированы на основе данных экспериментальных исследования теплопроводности пористых ТПМП-материалов. Используя технологию аддитивной 3D-печати, были изготовлены образцы пористых материалов со структурой, основанной на ТПМП Шварца Р, из пластика PETG и фотополимерной смолы.

Образцы представляют из себя пористые пластины размером 200x200x20 мм, которые состоят из элементарных ячеек с длиной ребра куба $a = 5$ мм (рис. 7). Эксперимент по определению эффективной теплопроводности проводился на сертифицированной установке ИТП-МГ4 «250». Результаты экспериментального определения эффективной теплопроводности образцов со структурой ТПМП Шварца Р в сравнении со значениями, полученными при использовании зависимости (7), представлены на рис. 8. Погрешность по норме Чебышева, достигающая 8% при толщине стенки $\delta = 0.0009$ м, вызвана влиянием конвекции и теплопроводности воздуха, которые не учитывались при численном моделировании.

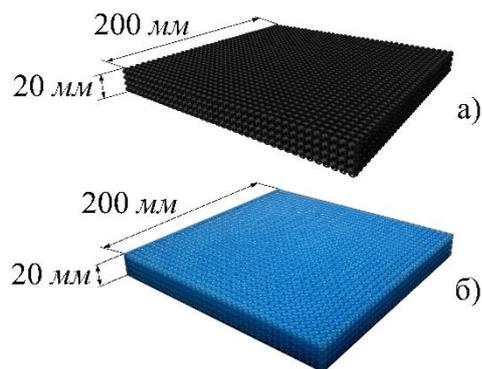


Рис. 7. Образцы пористого ТПМП-материала: а) PETG; б) фотополимерная смола

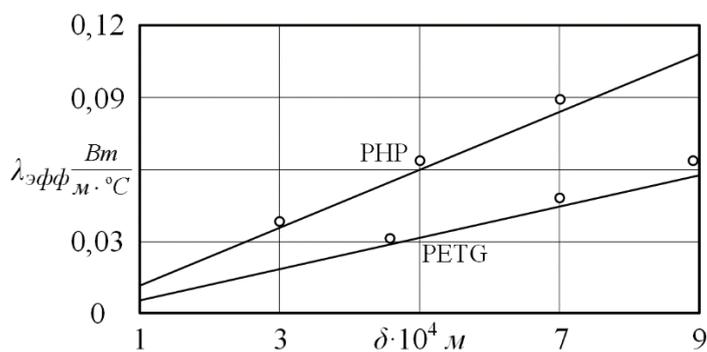


Рис. 8. График зависимости эффективной теплопроводности от толщины стенки ячейки при $a = 0,005$ м: — формула (7); о о о эксперимент

шарообразными порами, имеют вид:

$$\lambda_{эфф} = \lambda_a \left[\frac{\pi}{4} (d_{отн})^2 \right] + \lambda_m \left[1 - \frac{\pi}{4} (d_{отн})^2 \right]; \quad (9)$$

$$\lambda_{эфф} = \frac{\lambda_m}{1 + 0,0065 e^{5,6 d_{отн}}}, \quad (10)$$

Используя разработанный подход (1) – (7), в диссертации получены зависимости эффективной теплопроводности от геометрических параметров для пористых материалов с простой геометрией пор (цилиндр, шар). Зависимости, определяющие эффективную теплопроводность материалов с цилиндрическими и

где $d_{\text{отн}} = d_{\text{ц}} / a$ – относительный диаметр; λ_m – теплопроводность материала каркаса; λ_a – теплопроводность воздуха.

Во второй главе диссертации представлена новая модель теплопроводности, полученная в результате учета зависимости эффективных теплофизических свойств от геометрических характеристик пористой среды. Краевая задача теплопроводности в бесконечно протяженной пористой ТПМП-пластине толщиной 2δ имеет вид:

$$\left[\frac{\lambda_m(1-\phi)}{\lambda_{\phi\phi}} \right] \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (11)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \left. \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} + \text{Bi} \Theta(1, \text{Fo}) = 0, \quad (12)$$

где Θ , ξ , Fo , Bi – безразмерные параметры; $a_m = \lambda_m / c\rho$ – коэффициент температуропроводности материала каркаса; $\lambda_m(1-\phi) / \lambda_{\phi\phi} = H$.

Для решения задачи (11), (12) используем метод разделения переменных, в результате получим краевую задачу Штурма-Лиувилля:

$$d^2\psi(\xi) / d\xi^2 + H\nu\psi(\xi) = 0; \quad (13)$$

$$\left. \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0; \quad (14) \quad \left. \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} + \text{Bi} \cdot \psi(1) = 0, \quad (15)$$

решение которой отыскивается в виде

$$\psi(\xi) = B_0 + \sum_{i=1}^r B_i \xi^{i+1}, \quad (16)$$

где $B_i (i = \overline{1, r})$ – неизвестные коэффициенты. В соответствии с методом коллокаций потребуем, чтобы соотношение (16) удовлетворяло условию (15) и уравнению (13) в точках $\xi = 1/5; 2/5; 3/5; 4/5$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, из решения которой находим $B_i (i = \overline{1, 5})$. Затем из интеграла взвешенной невязки уравнения (13) получим алгебраическое уравнение пятой степени, решая которое определим значения собственных чисел $\nu_k(H)$.

После удовлетворения начальных условий задачи (11), (12) общее решение будет иметь вид:

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^n \left[A_k \exp(-\nu_k(H)\text{Fo}) \left(1 + \sum_{i=1}^r B_i \xi^{i+1} \right) \right]. \quad (17)$$

Результаты расчетов по формуле (17) в диапазоне чисел $0,03 \leq \text{Fo} < \infty$ отличаются от численного решения не более чем на 1% (по норме Чебышева) уже в четвертом приближении.

Важной задачей является исследование процесса теплопроводности в пористых телах при наличии внутренних источников теплоты, приводящих в отдельных случаях к неограниченному возрастанию температуры (тепловому взрыву), или к состоянию теплового равновесия. Математическая постановка задачи теплопроводности в бесконечно протяженной пористой ТППП-пластине толщиной 2δ имеет вид:

$$\left[\frac{\lambda_m(1-\phi)}{\lambda_{эфф}} \right] \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (18)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad \Theta(0, Fo) = 1; \quad \left. \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (19)$$

где $Po = \omega \delta^2 / [\lambda_{эфф} (T_{ст} - T_0)]$.

Для решения данной задачи применялся метод, согласно которому в рассмотрение вводится новая искомая функция вида:

$$\varphi_0(Fo) = \partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi, \quad -\infty < \varphi_0(Fo) < \infty. \quad (20)$$

Решение задачи (18), (19) отыскивается в виде полинома степени $i-1$:

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{i=1}^n b_i(Fo) \xi^{i-1}. \quad (21)$$

Для решения задачи в первом приближении ограничимся тремя слагаемыми в (21). Подставив (21) в (20) и в граничные условия из (19), решив при этом полученную систему уравнений, определим значения $b_i(Fo)$. Для приближенного удовлетворения (18) составим интеграл теплового баланса, вычислив который, получаем обыкновенное дифференциальное уравнения, решение которого имеет вид

$$\varphi_0(Fo) = C_1 e^{-3Fo/H} + Po. \quad (22)$$

Для выполнения начального условия из (20) составим его невязку и определим значение константы интегрирования C_1 . Решение задачи (18), (19) в первом приближении примет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = ((-2,5 - Po)e^{-3Fo/H} + Po)\xi(1 - 0,5\xi) + 1. \quad (23)$$

Для получения решения во втором и последующих приближениях для отыскания коэффициентов $b_i(Fo)$ используются дополнительные граничные характеристики (ДГХ), физический смысл которых состоит в выполнении уравнения (18) на границах исследуемой области. Общие формулы для определения ДГХ (i – номер приближения):

$$\left. \frac{\partial^i \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^i} \right|_{\xi=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^{i-1} \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^{i-1}} \right|_{\xi=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^i \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^i} \right|_{\xi=1} = 0.$$

Решение задачи (18), (19), полученное в соответствии с предложенным методом, уже в четвертом приближении отличается от численного решения с погрешностью менее 5% (по норме Чебышева).

В третьей главе представлен метод определения зависимости проницаемости от структурных характеристик пористых ТПМП-материалов. Исследование процессов переноса при течении жидкости в пористых средах (фильтрах, грунтах, катализаторах и др.), наряду с теплофизическими свойствами, представляет большой научный и прикладной интерес. В диссертации разработан подход к определению коэффициентов проницаемости пористых материалов при фильтрационном течении на основе результатов вычислительных экспериментов в ANSYS Fluent.

Основным законом, описывающим течение жидкости в пористых средах, в том числе в ТПМП-материалах, является закон Дарси, устанавливающий линейную связь между скоростью фильтрации и градиентом напора $\nabla P = -k\mu^{-1}u$, где P – давление; k – коэффициент проницаемости; u – скорость; μ – динамическая вязкость.

Простейшая (линейная) модель фильтрации Дарси не позволяет адекватно описать процессы переноса тепла и массы вблизи границы разделения сред. В этом случае может быть использована модель Бринкмана

$$\nabla P = -k\mu^{-1}u + \tilde{\mu}\nabla^2 u, \tag{24}$$

где $\tilde{\mu} = \mu/\phi\tau$ – эффективная вязкость; τ – коэффициент извилистости.

Стоит отметить, что в уравнении (24) $u(y)$ – это профиль скорости, а не средняя скорость в отличие от закона Дарси. Средняя скорость по Бринкману определяется как:

$$u_{cp} = 1/L \int_0^L \left(\left[1 - \operatorname{ch}\left(\sqrt{\phi L^2/k} y/L\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\phi L^2/k}\right) \right]^{-1} \right) k \nabla P / \mu dy, \tag{25}$$

где L – половина ширины канала. Основным эмпирическим коэффициентом в данном выражении является коэффициент проницаемости k .

Для его определения воспользуемся предложенной в диссертации численно-аналитической методикой по аналогии с задачами теплопроводности. При проведении ряда вычислительных экспериментов определяется зависимость градиента напора от структурных параметров исследуемой среды (толщины стенки ячейки, пористости) при постоянной средней скорости фильтрации $0,005 \text{ м/с}$. На рисунке 9 изображена геометрия для численного моделирования течения

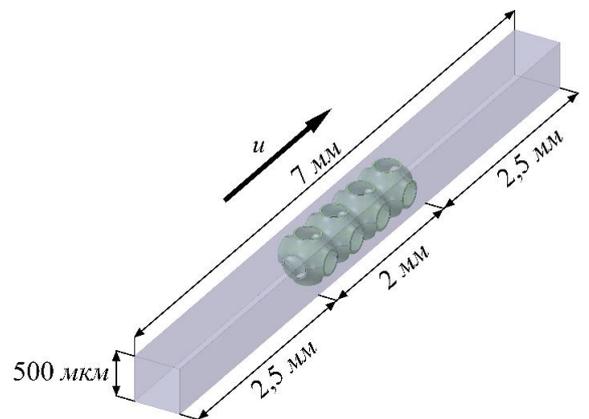


Рис. 9. Модель фильтрационного течения

жидкости через пористый ТПМП-материал в ANSYS Fluent. В таблице 1 представлены исходные данные для поставленной задачи.

Используя результаты вычислительного эксперимента, варьируя значением пористости среды и подставляя при этом в (25) значения потерь давления, получим зависимость проницаемости от пористости при средней скорости фильтрации 0,005 м/с:

$$k = 4,838 \cdot 10^{-11} \exp(2,957\phi) - 6,351 \cdot 10^{-11}. \quad (26)$$

Таблица 1. Исходные данные

Параметр	Значение
Начальная средняя скорость потока, u	0,005 м/с
Динамическая вязкость, μ	0,001003 кг/м·с
Плотность, ρ	998,2 кг/м ³
Длина ребра куба, a	500 мкм
Толщина стенки ячейки, δ	0,015 ... 0,15 мм

График на рисунке 10 иллюстрирует зависимость проницаемости от пористости исследуемой среды в соответствии с моделями Дарси и Бринкмана. Из анализа графика можно судить о соответствии моделей при заданной скорости в исследуемом диапазоне ϕ . Однако существует некоторое расхождение, которое достигает 8% (по норме Чебышева) при пористости 0.9.

Используя зависимость (26), запишем постановку краевой задачи фильтрационного течения в пористом канале:

$$\tilde{\mu} \frac{d^2 u(y)}{dy^2} - \frac{\mu}{k} u(y) + \nabla P = 0 \quad (0 < y < L); \quad (27)$$

$$u(L) = 0; \quad \left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad (28)$$

где ∇P – перепад давления по длине канала.

Общее решение задачи имеет вид

$$u(y) = \frac{k \nabla P}{\mu} \left[1 - \frac{\text{ch}\left(\sqrt{\phi L^2 / k} y / L\right)}{\text{ch}\left(\sqrt{\phi L^2 / k}\right)} \right]. \quad (29)$$

В диссертации приведены графики для профиля скорости в пористом канале, полученные в соответствии с (29).

Разработанные математические модели переноса были применены в диссертации при проектировании прототипов теплообменных устройств и тепловой изоляции, основанных на пористых материалах с упорядоченной макроструктурой.

Схема теплообменного устройства, в котором греющая и нагреваемая среды разделены стенкой, имеющей ТПМП форму, представлена на рис. 11. В диссертации выполнено численно исследование изображенного элемента ТПМП-теплообменника.

Схема теплообменного устройства, в котором греющая и нагреваемая среды разделены стенкой, имеющей ТПМП форму, представлена на рис. 11. В диссертации выполнено численно исследование изображенного элемента ТПМП-теплообменника.

График на рисунке 10 иллюстрирует зависимость проницаемости от пористости исследуемой среды в соответствии с моделями Дарси и Бринкмана. Из анализа графика можно судить о соответствии моделей при заданной скорости в исследуемом диапазоне ϕ . Однако существует некоторое расхождение, которое достигает 8% (по норме Чебышева) при пористости 0.9.

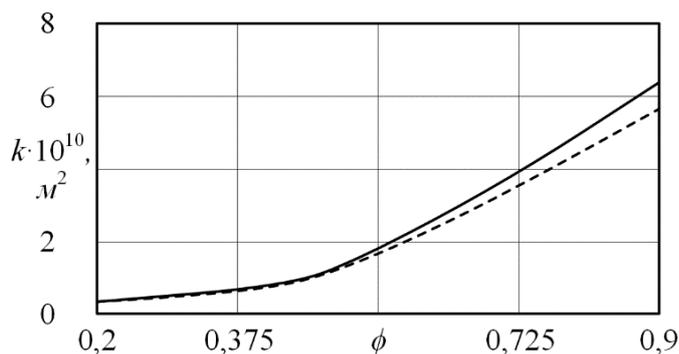


Рис. 10. Графики зависимости проницаемости от пористости при $u = 0,005$ м/с: — модель Бринкмана; - - - модель Дарси.

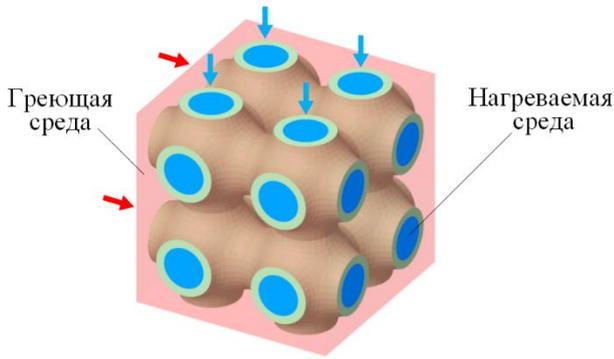


Рис. 11. Схема ТПМП-теплообменника

с турбулизацией потока, вызванной особенностями геометрии трижды периодических минимальных поверхностей.

В диссертации предложен вариант компоновки теплообменного устройства, основанного на ТПМП Шварца Р (см. рис. 12). Красным и синим цветом обозначен ход движения греющей и нагреваемой сред соответственно.

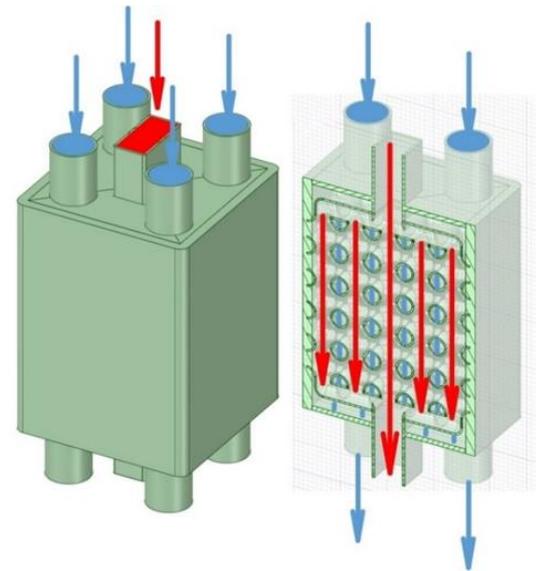


Рис. 12. Вариант компоновки ТПМП-теплообменника

В четвертой главе диссертации представлены результаты разработки модели теплопроводности, учитывающей пространственно-временную нелокальность процесса переноса. Исследование процессов переноса на микро- и нано-масштабах, особенно в пористых материалах, имеет критически важное значение для ряда передовых технологий, включая охлаждение микроэлектронных компонентов, мембранную фильтрацию и т.д.

В диссертации разработан новый алгоритм реализации численного метода (МКЭ), основанный на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности.

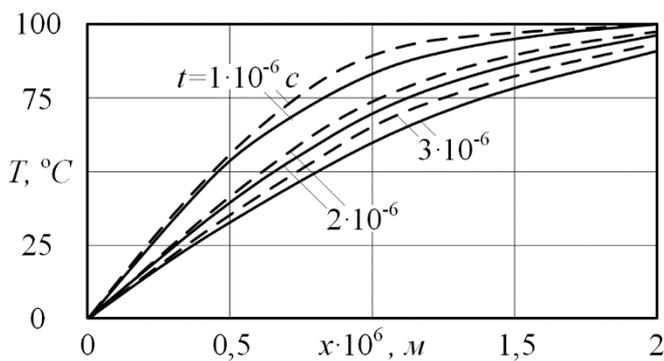


Рис. 13. Распределение температуры в ячейке:
 - - - - $\tau_1 = r_1 = 10^{-6}$; — $\tau_1 = r_1 = 0$

Данный алгоритм реализован на языке APDL (Ansys Parametric Design Language). С его помощью впервые решена задача теплопроводности в элементарной ячейке ТПМП Шварца Р, изготовленной из стали, при граничных условиях первого рода и $a = 10^{-3} \text{ м}$, $\delta = 10^{-4} \text{ м}$. График распределения температуры в ячейке, полученный в ходе решения, представлен

на рисунке 13. Из его анализа можно заключить, что учет релаксационных слагаемых в дифференциальном уравнение теплопроводности приводит к задержке изменения температуры в пластине при малых значениях пространственной и временной переменных.

В пятой главе диссертации представлены новые алгоритмы и комплексы программ, реализующие описанные в диссертации методы математического моделирования процессов тепломассопереноса. В частности, представлен APDL-алгоритм, предназначенный для проведения расчетов температурных полей в телах со сложной геометрической формой с учетом конечной скорости распространения тепла. Представлены алгоритмы, реализующие примененные в диссертации численно-аналитический и приближенный аналитический методы, с использованием системы компьютерной алгебры MathCAD 15.0.

В приложениях приведены акты внедрения и свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Основные выводы и результаты работы.

1. Разработан новый метод математического моделирования процессов тепломассопереноса в пористых средах с топологией трижды периодических минимальных поверхностей. На основе интерпретации вычислительных и натуральных экспериментов определены коэффициенты переноса, которые зависят от характерных параметров пористой среды (размер элементарной ячейки, толщина стенки, тип ТПМП).

2. Разработана новая математическая модель теплопроводности в пористых материалах со структурой, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях, позволяющая учитывать конфигурацию (пористость, толщина стенки, размер элементарной ячейки, тип ТПМП) и свойства исходного материала при определении температурных полей и тепловых потоков в пористых средах.

3. При помощи предложенного численно-аналитического метода, основанного на совместном использовании методов разделения переменных, коллокаций и ортогонального метода взвешенных невязок, решена задача теплопроводности в пористой бесконечно протяженной ТПМП-пластине при граничных условиях третьего рода. Полученное решение в диапазоне чисел $0,03 \leq Fo < \infty$ отличается от численного решения не более чем на 1% (по норме Чебышева) уже в четвертом приближении.

4. Получено решение задачи теплопроводности в бесконечно протяженной пористой ТПМП-пластине с равномерно распределенным внутренним источником теплоты при помощи приближенного аналитического метода, основанного на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального

метода теплового баланса, особенность которого заключается во введении новой искомой функции, которая представляет собой плотность теплового потока в точке приложения граничного условия.

5. Разработаны новые алгоритмы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, реализующих примененные в диссертации численно-аналитический и приближенно-аналитический методы, для решения поставленных краевых задач теплопроводности в пористых ТПМП-материалах.

6. Разработан новый алгоритм реализации метода конечных элементов, основанный на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности, при помощи которого впервые решена задача теплопроводности в элементарной ячейке ТПМП Шварца P с учетом двухфазного запаздывания. Полученные результаты демонстрируют задержку изменения температуры в ячейке при учете релаксационных слагаемых.

Список основных публикаций автора по теме диссертации

В научных изданиях из перечня ВАК:

- [1] **Попов, А.И.** Разработка тепловой изоляции с упорядоченной структурой, основанной на ТПМП Неовиуса / А.И. Попов // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2022. № 6. С. 58-68. DOI: 10.17588/2072-2672.2022.6.058-068. EDN: QBXOKW.
- [2] **Попов, А.И.** Численное решение нелинейной задачи теплопроводности в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой / С.А. Зинина, А.И. Попов, А.В. Еремин // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 53-67. DOI: 10.26456/vtpmk702.
- [3] **Попов, А.И.** Теплообмен в плоском канале при стабилизированном ламинарном течении жидкости / А.В. Еремин, А.И. Попов, К.В. Губарева // Перспективы науки. 2019. № 8(119). С. 75-80. EDN: RSYJTR.
- [4] **Попов, А.И.** Численное исследование процесса теплопереноса в плоской стенке с внутренними источниками теплоты при граничных условиях первого рода / С.А. Зинина, А.И. Попов, Д.М. Брагин // Инженерный вестник Дона. 2022. № 3(87). С. 200-208. EDN: AKOOQS.
- [5] **Попов, А.И.** Метод определения коэффициента эффективной теплопроводности пористого материала на основе минимальной поверхности типа Schoen's I-WP(R) / Д.М. Брагин, А.В. Еремин, А.И. Попов, А.С. Шульга // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2023. № 2. С. 61-68. DOI: 10.17588/2072-2672.2023.2.061-068. EDN: NDFIKY.

В научных изданиях, индексируемых в Scopus:

- [6] **Popov, A.** Modeling and measurement of effective thermal conductivity of materials reinforced with bars / A. Popov, A. Eremin, D. Bragin // International Journal of Thermophysics. 2023. Vol. 44, No. 2. P. 17. DOI: 10.1007/s10765-022-03137-3. EDN: AGEKNW.
- [7] **Popov, A.I.** Discrete heat transfer model with space–time nonlocality / A.V. Eremin, E.A. Kishov, A.I. Popov // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 138. P. 106346. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106346. EDN: VEVWCU.
- [8] **Popov, A.I.** Effective thermal conductivity of structured porous medium: Numerical study / A.I. Popov, D.M. Bragin, A.V. Eremin // Defect and Diffusion Forum. 2022. Vol. 419. P. 69-76. DOI: 10.4028/p-oevpt9. EDN: ESQGNQ.
- [9] **Popov, A.I.** Mechanical properties of porous materials based on new triply periodic and minimal surfaces / A.V. Eremin, M.A. Frolov, A.F. Krutov, et al. // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2024. P. 1-17. DOI: 10.1080/15376494.2024.2303724

В других изданиях:

- [10] **Попов, А.И.** Исследование тепломассопереноса в канале с оребрением на основе трижды периодической минимальной поверхности / А.И. Попов, А.В. Еремин, Н.Н. Кечин // Градостроительство и архитектура. 2023. Т. 13, № 4(53). С. 49-56. DOI: 10.17673/Vestnik.2023.04.06. EDN: TJONUW.
- [11] **Попов, А.И.** Исследование процесса теплопереноса в тепловыделяющем элементе цилиндрической формы / С.А. Зинина, А.И. Попов, Д.М. Брагин, А.В. Еремин // Инженерный вестник Дона. 2021. № 8(80). С. 210-219. EDN: QIOFL.

- [12] **Попов, А.И.** Векторное распределение скорости в элементарной ячейке поверхности Шена I-WP / Д.М. Брагин, А.И. Попов, С.А. Зинина [и др.] // Уральский научный вестник. 2022. Т. 3, № 1. С. 66-72. EDN: OKEGQT.
- [13] **Попов, А.И.** Исследование температурного состояния плоского тепловыделяющего элемента с внутренним тепловыделением / С.А. Зинина, А.И. Попов, Д.М. Брагин, А.В. Еремин // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. 2022. Т. 7, № 3-1(25). С. 4-10. EDN: WRICXK.
- [14] **Попов, А.И.** Численное исследование аэродинамических свойств трижды периодической минимальной поверхности Неовиуса / Р.М. Мустафин, А.И. Попов, Д.М. Брагин // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. 2023. Т. 8, № 11(37). С. 32-39. EDN: KSLFKW.
- [15] **Попов, А.И.** Определение теплопроводности материала с упорядоченной структурой, основанной на трижды периодической минимальной поверхности Шварца Р, с учётом конвекции / А.И. Попов, Д.М. Брагин, С.А. Зинина, А.В. Еремин // Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки. 2023. № 3. С. 39-45. EDN: NNWXLС.
- [16] **Попов, А.И.** Распределение векторного поля скорости с внешней стороны элементарной ячейки поверхности Шварца типа Р / А.И. Попов, Д.М. Брагин, С.А. Зинина, А.В. Еремин // Проблемы научной мысли. 2021. Т. 9, № 1. С. 71-77. EDN: KCWAЮ.
- [17] **Попов, А.И.** Исследование влияния методов генерации трижды периодических минимальных поверхностей на их теплофизические свойства / А.И. Попов, Д.М. Брагин, С.А. Зинина, А.В. Еремин // Математический вестник Вятского государственного университета. 2023. № 2(29). С. 4-10. DOI: 10.25730/VSU.0536.23.006. EDN: SHBMUZ.
- [18] **Попов, А.И.** Исследование тепломассопереноса в канале с TPMS оребрением / А.И. Попов, Д.М. Брагин, Н.Н. Кечин, А.В. Еремин // Theoretical & Applied Science. 2023. № 11(127). С. 406-410. DOI: 10.15863/TAS.2023.11.127.50. EDN: HFCZVO.
- Список программ для ЭВМ, зарегистрированных в Роспатенте:**
- [19] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669994 Рос. Федерация. «Программа для реализации алгоритма решения задачи теплопроводности в стержне с учетом релаксационных явлений» / А.И. Попов, С.А. Зинина, Д.М. Брагин [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 06.12.2021. EDN: NCEUYE.
- [20] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023616948 Рос. Федерация. «Определение коэффициента эффективной теплопроводности пористых материалов с упорядоченной структурой на основе экспериментальных данных» / А.И. Попов, Д.М. Брагин, А.В. Еремин [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 04.04.2023. EDN: NIKHML.
- [21] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021612335 Рос. Федерация. «Программный модуль ANSYS "ThermalRelax"» / А.В. Еремин, И.В. Кудинов, Е.А. Кишов [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 16.02.2021. EDN: GZGPHV.
- [22] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020611222 Рос. Федерация. «Теплообмен в плоскопараллельном канале при постоянных теплофизических свойствах жидкости» / А.В. Еремин, А.И. Попов, К.В. Трубицын [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 27.01.2020. EDN: OLPAUH.
- [23] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020611224 Рос. Федерация. «Теплопроводность в двухслойной пластине с учетом конечной скорости распространения теплоты» / А.В. Еремин, А.И. Попов, К.В. Трубицын [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 27.01.2020. EDN: UYAJGV.
- [24] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021667495 Рос. Федерация. «Численное решение задачи локально-неравновесного теплообмена в плоской стенке при граничных условиях первого рода» / А.И. Попов, С.А. Зинина, Д.М. Брагин [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 29.10.2021. EDN: BPQIUO.
- [25] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022665882 Рос. Федерация. «Приближенно-аналитический метод решения задачи теплопроводности в цилиндре с внутренними источниками теплоты» / С.А. Зинина, А.И. Попов, Д.М. Брагин [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 23.08.2022. EDN: JRSPKV.
- [26] **Попов, А.И.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023684550 Рос. Федерация. «Приближенно-аналитический метод решения задачи теплопроводности в пористой пластине, структура которой основана на трижды периодических поверхностях минимальной энергии» / С.А. Зинина, А.И. Попов, А.В. Еремин [и др.]; Правообладатель ФГБОУ ВО «СамГТУ». Зарегистрировано 16.11.2023. EDN: KJAYME.

Заказ № _____. Формат 60×84 1/16 Уч. изд. л. 1.25. Тираж 100 экз.
Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244, корпус 8.
Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета 24.2.377.02
на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
(протокол № 3 от 25 апреля 2024 г.)