

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»



На правах рукописи

Попов Андрей Игоревич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА
В МАТЕРИАЛАХ С УПОРЯДОЧЕННОЙ МАКРОСТРУКТУРОЙ**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ (технические науки)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
А.В. Еремин

Самара 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЗОР РАБОТ ПО НАПРАВЛЕНИЮ РАЗРАБОТКИ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ	12
2. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ	22
2.1. Создание САD-моделей пористых ТПМП-материалов для исследования теплопроводности	22
2.2. Разработка метода моделирования теплопроводности в пористых материалах на основе интерпритации результатов вычислительных экспериментов	28
2.2.1. Численно-аналитический метод определения теплопроводности материала со структурой, основанной на ТПМП Шварца Р.....	28
2.2.2. Определение эффективной теплопроводности группы ТПМП- материалов.....	35
2.2.3. Экспериментальная верификация	37
2.2.4. Определение теплопроводности пористого материала с цилиндрическими полостями	40
2.2.5. Определение теплопроводности пористого материала с шарообразными полостями	49
2.3. Математическое моделирование теплопроводности в пористых ТПМП- материалах на основе модифицированного уравнения	53
2.3.1. Теплопроводность в пористой бесконечно протяженной пластине при граничных условиях третьего рода	54

2.3.2. Теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине с внутренними источниками теплоты.....	61
3. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ГИДРОДИНАМИКИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ	67
3.1. Создание САD-моделей пористых ТПМП-материалов для CFD-моделирования	67
3.2. Метод определения проницаемости пористых ТПМП-материалов на основе интерпритации результатов CFD-моделирования	68
3.3. Исследование фильтрационного течения жидкости в пористой среде	75
3.4. Исследование тепломассопереноса в канале с ТПМП-оребрением	77
3.5. Прикладное применение пористых ТПМП-материалов	83
4. РАЗРАБОТКА МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МАТЕРИАЛАХ С УПОРЯДОЧЕННОЙ МАКРОСТРУКТУРОЙ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ.....	88
4.1. Разработка модифицированной модели теплопроводности	88
4.2. Разработка трехмерной локально-неравновесной модели теплопроводности	93
4.3. Исследование локально-неравновесного процесса теплопроводности в пористом материале с упорядоченной макроструктурой	98
4.4. Исследование теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине с учетом релаксации.....	100
5. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ЧИСЛЕННО – АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	103
5.1. Реализация метода решения трехмерных задач теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты	103

5.2. Реализация алгоритма решения задачи теплопроводности методом коллокаций	114
5.3. Реализация алгоритма решения задачи теплопроводности методом введения дополнительной искомой функции	117
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	121
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	123
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	135

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы.

Математическое моделирование процессов тепломассообмена в технических системах является важной научно-технической задачей. Проектирование современного теплотехнического оборудования, тепловой защиты зданий и сооружений невозможно без корректного описания процессов переноса тепла и массы в твердых телах и жидкостях. Особый интерес представляют процессы переноса, протекающие в пористых материалах (композитах, пенах и др.), широко распространенных в космическом и авиационном машиностроении, энергетике, медицине и др.

Большая часть природных (пемзы, доломиты, грунты и др.) и искусственных (керамзит, аглопорит, шлаковая пемза и др.) пористых материалов имеют стохастическую структуру – неравномерный размер и характер распределения пор, существенно затрудняющий определение закономерностей переноса тепла и массы. В настоящее время в научной практике востребованным является особый вид пористых сред с «правильной» упорядоченной макроструктурой. К их числу относятся как среды с порами простой геометрической формы (шар, цилиндр), так и более сложные, пространственная структура которых образована развитыми топологическими объектами, в особенности, трижды периодическими минимальными поверхностями (ТПМП). Первые упоминания о «примитивных» минимальных поверхностях встречаются в научных работах Шварца, Шёна, Неовиуса и др., опубликованных в середине девятнадцатого века. Несмотря на преимущества (высокая объемная пористость, большая площадь рабочей поверхности, высокие прочностные характеристики) в сравнении с традиционными, пористые ТПМП-материалы широкого распространения не получили по причине сложности их изготовления и прогнозирования физических свойств. В настоящее время в связи с развитием аддитивных технологий, вычислительной техники, средств и методов моделирования стало возможным

не только теоретическое исследование материалов на основе ТППП, но и их прикладное использование, например, в качестве матриц катализаторов, теплообменных трактов ТМО-оборудования и др. Однако, одним из факторов, ограничивающих применение пористых ТППП-материалов в технике, является отсутствие математического аппарата для описания процессов тепломассопереноса в них с учетом структурных характеристик пористой среды. В связи с этим тема настоящей диссертации, связанная с разработкой и развитием методов математического моделирования тепловых и гидродинамических процессов в пористых средах с упорядоченной макроструктурой, весьма актуальна.

Цель работы: разработка новых численно-аналитических методов математического моделирования процессов тепломассопереноса в пористых материалах с упорядоченной макроструктурой, которые, в отличие от известных, позволяют учитывать структурные характеристики среды.

Задачи исследования:

1. Разработать метод математического моделирования тепловых и гидродинамических процессов в пористых средах с упорядоченной макроструктурой на основе интерпретации данных натуральных и вычислительных экспериментов.

2. Разработать математические модели тепломассопереноса в гомогенизированных пористых средах с учетом геометрических характеристик исследуемых структур (толщины стенки ячейки, просветность и др.), сформулировать соответствующие краевые задачи и выполнить анализ их решений.

3. Решить краевую задачу теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине с помощью оригинального численно-аналитического метода, основанного на совместном использовании методов разделения переменных, коллокаций и ортогонального метода взвешенных невязок.

4. Решить задачу теплопроводности в бесконечно протяженной пористой пластине с равномерно распределенными внутренними

источниками теплоты при помощи метода, основанного на совместном использовании метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса.

5. Разработать комплекс проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, реализующих примененные в диссертации численно-аналитический и приближенно аналитический методы решения краевых задач тепломассопереноса.

6. Разработать алгоритм реализации метода конечных элементов, основанный на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности. Применить разработанный алгоритм к решению задач теплопереноса на микро- и нано уровне в пористых материалах.

7. Провести численные эксперименты по определению температурных полей, контуров распределения скорости и давления при течении вязких жидкостей в пористых материалах с упорядоченной макроструктурой с использованием программных комплексов ANSYS¹ и MathCAD.

Тематика работы соответствует пунктам паспорта научной специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1) Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений; 2) Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; 3) Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; 4) Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента;

¹Лицензия на использование ANSYS в ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» предоставлена в рамках договора ЕП127/21 от 4.10.2021 г.

5) Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их результатов, в том числе с применением современных компьютерных технологий.

Научная новизна:

1. Разработан метод математического моделирования процессов тепломассопереноса в пористых средах с топологией трижды периодических минимальных поверхностей, особенностью которого является использование оригинального способа вычислительной гомогенизации исследуемой области и определение эффективных коэффициентов переноса на основе интерпретации вычислительных и натурных экспериментов.

2. Разработана новая математическая модель теплопроводности в пористых средах со структурой, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях, расширяющая возможности классической диффузионной модели и, по сравнению с известными моделями, позволяющая учитывать структурные характеристики трижды периодических минимальных поверхностей (размер элементарной ячейки, толщины стенки ячейки, пористость и т.д.).

3. На основе совместного использования метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок, а также удовлетворения дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля в заданном наборе точек пространственной переменной решена задача теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине. Особенность предложенного метода заключается в точном удовлетворении исходного дифференциального уравнения в отдельных точках пространственной переменной, что позволяет получать высокую точность решения при малом количестве приближений.

4. При помощи приближенного аналитического метода, основанного на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса, впервые решена задача теплопроводности в бесконечно протяженной пористой пластине с равномерно распределенными внутренними источниками теплоты.

5. Разработаны новые алгоритмы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, реализующих примененные в диссертации численно-аналитический и приближенно-аналитический методы в программной среде MathCAD.

6. Разработан новый алгоритм реализации метода конечных элементов, основанный на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности, для решения задач теплопереноса на микро- и нано уровне в пористых материалах.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод исследования тепловых и гидродинамических процессов в пористых средах с упорядоченной макроструктурой с использованием оригинального способа вычислительной гомогенизации исследуемой области и определения коэффициентов переноса на основе интерпретации вычислительных и натуральных экспериментов.

2. Новые математические модели тепломассопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой.

3. Результаты применения оригинального численно-аналитического метода, основанного на совместном применении метода разделения переменных, ортогональных методов взвешенных невязок и метода коллокаций, к решению задачи теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине.

4. Результаты применения оригинального приближенного аналитического метода, основанного на интегральном методе теплового баланса с введением дополнительной искомой функции, к решению задачи теплопроводности в бесконечно протяженной пористой ТППП-пластине с равномерно распределенными внутренними источниками теплоты.

5. Комплекс проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, предназначенных для решения разработанных в диссертации задач тепло- и массопереноса в пористых телах с упорядоченной макроструктурой, с помощью предложенных численных и приближенно-аналитических методов.

6. Результаты разработки нового алгоритма применения метода конечных элементов, основанного на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности.

Достоверность результатов работы исследования подтверждается сопоставлением полученных данных с реальными теплофизическими процессами; сравнением численных решений, полученных в диссертации, с экспериментальными данными и результатами, опубликованными другими исследователями; непротиворечивостью полученных выводов классическим физическим законам и современным представлениям о механизмах переноса тепла и массы.

Практическая значимость работы заключается в разработке эффективных вычислительных методов определения температурных полей, контуров распределения скорости и давления в пористых материалах с упорядоченной макроструктурой. Разработанные в диссертации модели тепломассопереноса, а также полученные приближенные и численно-аналитические решения могут быть использованы при проектировании теплообменного оборудования, расчете тепловых потерь через ограждающие конструкции сооружений и в ряде других прикладных исследований.

Внедрение результатов работы. Результаты диссертационной работы частично используются в учебном процессе Самарского государственного технического университета в лекционных курсах для студентов бакалавриата направления подготовки 13.03.01. «Теплоэнергетика и теплотехника», а также в расчетной практике крупного промышленного предприятия ООО «ТСК Волгаэнергопром» (г. Самара) и ООО «Инженерное бюро Пульсар» (г. Самара).

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: Международная мультидисциплинарная конференция «FarEastCon», г. Владивосток, 2020, 2021 г.; Международная научно-техническая конференция «Промышленное производство и металлургия – ICIMM», г. Нижний Тагил, 2021 г.;

Международная конференция «SUMMA», г. Липецк, 2020, 2021, 2022, 2023 г.; Международная научно-техническая конференция «Пром-Инжиниринг», г. Сочи, 2022 г.; Международная научно-техническая конференция «Энергетические системы», г. Белгород, 2019 г.; Международная научная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах», г. Самара, 2019 г. Также результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры «Промышленная теплоэнергетика» Самарского государственного технического университета в 2021-2023 гг.

Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-79-10044).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 21 печатной работе, из них 4 статьи в международных журналах, индексируемых в Scopus, 5 статей – в журналах из перечня ВАК, 12 статей в других изданиях; получены 8 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. В работах [97-104,107,108] диссертанту принадлежит постановка задач, непосредственное выполнение основного объема вычислительной работы, интерпретация результатов и формулировка выводов. В работах [88-96], опубликованных в соавторстве, диссертанту в равной степени с другими авторами принадлежит получение решений, анализ и интерпретация результатов работы. В работе [106] выполнен анализ результатов и определено влияние релаксационных слагаемых на температурный профиль в исследуемом объекте. В [105] диссертанту принадлежит постановка и проведение экспериментального исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка используемой литературы, приложений; изложена на 134 страницах основного машинописного текста и 22 страницах приложений, содержит 60 рисунков. Список использованной литературы включает 108 наименований.

1. ОБЗОР РАБОТ ПО НАПРАВЛЕНИЮ РАЗРАБОТКИ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Пористые материалы – это твердые материалы, которые содержат полости в своей структуре. Полости могут иметь совершенно различные формы, а сам пористый материал может иметь как природное (песок, горные породы, цеолиты, грунты), так и искусственное происхождение (пористая керамика, пенополистирол, ткани).

Следует различать два основных вида пористости: открытую и закрытую [15].

Закрытая пористость означает, что поры в материале изолированы от внешней среды, не позволяя газам или жидкостям проникать внутрь. Материалы с преимущественно закрытой пористостью широко используются в ситуациях, где необходима изоляция от внешней среды и легкий вес, а именно: в строительстве и тепловой изоляции (пенобетон, пеностекло), упаковке и транспортировке (вспененный полиэтилен), авиационной и автомобильной технике (волокнистые карбоновые материалы), электротехнике (термопластичные пористые полимеры) и медицине (пористые биосовместимые полимеры).

Пористые материалы с открытой системой пор характеризуются наличием соединенных между собой полостей и каналов, обеспечивающих проницаемость для газов и жидкостей. Такие материалы находят применение в областях разработки теплообменного оборудования, фильтров, катализаторов и т.д.

Характерными параметрами для пористых материалов являются размер пор и пористость материала, которая определяется отношением суммарного объема занимаемых в теле пустот к полному объему тела

$$\phi = \frac{V_p}{V}, \quad (1.1)$$

где V_n – объем пустот; V – полный объем тела.

Существует большое количество работ, посвященных классификации пор по их размерам [50,86,71,40,52]. На основании адсорбционных и капиллярных явлений Дубинин М.М. [40] классифицирует поры по их линейному размеру x (равному радиусу, измеренному перпендикулярно направлению движения молекулы во время заполнения поры) на следующие категории: микропоры ($x < 0.6 \div 0.7$ нм), супермикропоры ($0.6 \div 0.7 < x < 1.5 \div 1.6$ нм), мезопоры ($1.5 \div 1.6 < x < 100 \div 200$ нм), макропоры ($x > 100 \div 200$ нм).

Черемской П.Г. [15] также классифицировал отдельные типы пор, используя критерии линейного размера пор в основных структурных элементах пористого материала. В этой классификации несколько типов пор определяются следующим образом:

- макропоры ($x > 1000$ нм) – определяются как поры, размер которых значительно превышает размер отдельного элемента;
- микропоры ($100 < x < 1000$ нм) – поры примерно такого же размера, как и структурные элементы;
- субмикропоры ($x < 100$ нм) – поры значительно мельче структурных частиц;
- ультрамикропоры ($x < 1 \div 2$ нм) – могут находиться внутри структурных элементов.

А Kodikara J. [52] предложил разделить длину пор в структурах на следующие категории: межкластерные (макропоры $10^4 \div 10^6$ нм); межагрегатные (микропоры $1 \div 30 < x < 10^3$ нм); межчастичные (субмикропоры $25 \div 1000$ нм); внутривчастичные (ультрамикропоры $x < 3 \div 4$ нм).

Вне зависимости от размера пор структура пористых материалов может быть упорядоченная или неупорядоченная. Неупорядоченные пористые материалы характеризуются случайным распределением пор по всему объему

тела. Это означает, что поры в таких материалах могут иметь различные размер и форму, не подчиняясь при этом какому-либо порядку.

Пористые материалы с упорядоченной структурой обладают регулярным и организованным характером распределения пор. В этом случае поры имеют четкий размер и порядок, следуя определенным геометрическим или кристаллическим шаблонам. Такие материалы чаще всего имеют решетчатую структуру, в которой поры выстроены по определенным направлениям и интервалам. Главным преимуществом пористых материалов с упорядоченной структурой является то, что они проще поддаются точному математическому описанию. Эти материалы часто используются в оптике, фотонике, катализе, сенсорах и других технологических областях, где контроль порядка и размера пор имеет важное значение для достижения конкретных свойств и функциональности.

Отдельно стоит сказать про особый класс пористых материалов с упорядоченной структурой, а именно пористые материалы со структурой, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях (ТПМП). ТПМП – это поверхности, которые обладают наименьшей площадью для заданной границы, так что средняя кривизна в каждой точке поверхности равна нулю. Эти поверхности обладают уникальными геометрическими характеристиками. Например, минимальная поверхность по своей природе гладкая, не имеет острых краев или углов и делит пространство на две или более непересекающиеся, переплетающиеся и бесконечные области, которые могут периодически повторяться в трех перпендикулярных направлениях. ТПМП наблюдаются в природе, например, в мыльных пленках [73], блок-сополимерах [59], крыльях бабочек [66,61], морских ежах [55] и т.д.

Первое упоминание о ТПМП в литературе относится к 1865 году, когда немецкий математик Герман Шварц представил «Примитивную» («Primitive») и «Алмазную» («Diamond») поверхности. Почти столетие спустя несколько других ТПМП были представлены Аланом Шоном. [73] Возможно, одной из самых интересных ТПМП, открытых Шоном, была поверхность типа

«Гироид» («Gyroid»), которая интенсивно исследовалась на предмет ее топологических свойств в различных дисциплинах в течение последних двух десятилетий [41,80,1,26,36].

В настоящее время большое внимание трижды периодическим минимальным поверхностям уделяется со стороны таких ученых как Oraib Al-Ketan, Rashid K. Abu Al-Rub, Lei Zhang, Zhilong Cheng, DJ Yoo и других [47,23,56,87,37,51]. Очевидно, явным недостатком пористых материалов на основе трижды периодических минимальных поверхностей является сложность в изготовлении. Однако, развитие аддитивных технологий позволяет производить различные объекты со сложной структурой, в том числе материалы с ТППП топологией. Поэтому столь стремительный интерес к применению таких структур в различных инженерных объектах наблюдается именно в последнее время.

Наиболее разработанными на сегодняшний день являются вопросы, связанные с изучением прочностных характеристик (при сжатии, растяжении, скручивании) пористых материалов на основе ТППП [24,78,19,82,105]. Wang Z и др. в своем исследовании [78] обнаружили, что пористые структуры, основанные на трижды периодических минимальных поверхностях, по прочности не уступают сотовым панелям при одноосном сжатии. Однако, в отличие от сотовых панелей ТППП-материалы не ограничены направлением сжатия и могут выдерживать разнонаправленную нагрузку. В статье Al-Ketan и др. [24] описаны результаты комплексного (численного и экспериментального) исследования прочности при сжатии различных типов пористых ТППП-материалов (I-WP, Diamond, Gyroid, Primitive и др.). Определено, что материал с топологией Diamond обладает наилучшими прочностными характеристиками.

Применение пористых ТППП-материалов не ограничивается задачами механики. Существует множество других вариантов использования пористых материалов на основе ТППП, а именно: в качестве изоляции (тепловой,

электромагнитной, звуковой) [68,43,84,88,97], в теплообменных устройствах [63,85], в биоимплантах [48,39], в катализаторах [22,57], в фильтрах [74] и т.д.

Сдерживающими факторами при разработке различных устройств на основе пористых ТППП-материалов помимо сложностей при изготовлении являются трудности при описании математических моделей переноса (тепла, массы, импульса) в системах с ТППП структурой, а также отсутствие базы данных характеристик (эффективные теплофизические, гидродинамические, механические и др.), которые можно использовать в качестве параметров при построении математических моделей. В связи с этим важной задачей является разработка методологии моделирования процессов переноса в пористых материалах, основанных на ТППП.

Согласно закону Фурье тепловой поток в твердых телах определяется как произведение коэффициента теплопроводности и градиента температуры [9]

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (1.1)$$

где q – плотность теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности; T – температура; x – координата. Коэффициент теплопроводности в этом случае равен количеству тепла, протекающего в единицу времени через единицу поверхности твердого тела, при перепаде температуры в один градус. Однако, применение основного закона теплопроводности Фурье к пористым материалам является лишь условным. Наличие пор в материале не позволяет рассматривать его как сплошной. Полости в материале могут оказывать разное влияние на теплопроводность в зависимости от их размера и характера распределения. Поэтому при определении теплопроводности пористых материалов важно учитывать как размер и форму пор, так и теплопроводность материала, заполняющего поры.

В соответствии с правилом микстур [10,21,67,76] эффективная теплопроводность пористого материала, где поры имеют цилиндрическую

форму и расположены параллельно направлению теплопереноса, определяется как

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_{\text{т}}(1 - \phi) + \lambda_{\text{п}}\phi, \quad (1.2)$$

где $\lambda_{\text{т}}$ – коэффициент теплопроводности твердой части; $\lambda_{\text{п}}$ – коэффициент теплопроводности материала, заполняющего поры. А в случае перпендикулярного расположения пор

$$\frac{1}{\lambda_{\text{эфф}}} = \frac{(1 - \phi)}{\lambda_{\text{т}}} + \frac{\phi}{\lambda_{\text{п}}}. \quad (1.3)$$

Для определения эффективной теплопроводности пористого материала со сферическими полостями Максвелл Д.К. предложил следующую зависимость [60]

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_{\text{т}} \frac{\lambda_{\text{п}} + 2\lambda_{\text{т}} + 2\phi(\lambda_{\text{п}} - \lambda_{\text{т}})}{\lambda_{\text{п}} + 2\lambda_{\text{т}} - \phi(\lambda_{\text{п}} - \lambda_{\text{т}})}. \quad (1.4)$$

Однако зависимость (1.4) предполагает, что поры не взаимодействуют между собой, то есть радиус поры значительно меньше расстояния между ними.

Используя предположения о проницаемости и напряженности поля, отличные от Максвелла, Брюггеман Д.А.Г. вывел следующее неявное уравнение для сферических полостей в однородной среде [77]

$$\phi \left(\frac{\lambda_{\text{п}} - \lambda_{\text{эфф}}}{\lambda_{\text{п}} + 2\lambda_{\text{эфф}}} \right) + (1 - \phi) \left(\frac{\lambda_{\text{т}} - \lambda_{\text{эфф}}}{\lambda_{\text{п}} + 2\lambda_{\text{эфф}}} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Позже Гамильтон Р. Л. и Кроссер О. К. получили зависимость для определения эффективной теплопроводности двухфазного материала [46]

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_{\text{т}} \frac{\lambda_{\text{п}} + (n - 1)\lambda_{\text{т}} - (n - 1)\phi(\lambda_{\text{т}} - \lambda_{\text{п}})}{\lambda_{\text{п}} + (n - 1)\lambda_{\text{т}} - \phi(\lambda_{\text{п}} - \lambda_{\text{т}})}, \quad (1.6)$$

где n – эмпирическая константа, зависящая от формы пор и определяемая на основе экспериментальных исследований. Стоит отметить, что для сферических пор $n = 3$ и в этом случае выражения (1.6) преобразуется в зависимость Максвелла (1.4).

В 1975 году Ри С.К. на основе зависимости Айвазова М.И. и Домашнева И.А. [1] получил следующее выражение для определения эффективной теплопроводности пористых материалов [70]

$$\frac{\lambda_{\text{эфф}}}{\lambda_{\text{т}}} = \frac{1 - \phi}{1 + m\phi^2}, \quad (1.7)$$

где m – уточняющий коэффициент, который определяется экспериментально и может принимать значения от 0 до 14. Однако, выражение (1.7) демонстрирует наибольшую точность при определении эффективной теплопроводности пористых керамических материалов и пористости не превышающей значения 0.74.

Отдельно стоит сказать про исследование Эшби М.Ф. [25]. В своей работе Эшби рассматривает решетчатые и ячеистые материалы, к которым в какой-то степени можно отнести пористые ТПМП-материалы. Для определения эффективной теплопроводности пористых решетчатых материалов Эшби предлагает следующую зависимость

$$\lambda_{\text{эфф}} = \frac{1}{3} \left((1 - \phi) + 2(1 - \phi)^{1.5} \right) \lambda_{\text{т}} + \phi \lambda_{\text{п}}. \quad (1.8)$$

Существуют и другие зависимости для определения коэффициента эффективной теплопроводности [6] пористых материалов, однако ни одна из них и вышеперечисленных не могут в полной мере описать эффективную теплопроводность пористых ТПМП-материалов.

В вопросах, связанных с моделированием течения жидкости через пористые среды, также применяется множество подходов [64,53,20,79,72]. Теоретической основой течения жидкостей или газов через пористые среды является теория фильтрации. Основной закон, описывающий фильтрацию жидкости или газа через пористую среду – закон Дарси [38]

$$\nabla P = -\frac{\mu}{k} u; \quad (1.9)$$

где k – коэффициент проницаемости; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; u – скорость; P – давление.

Коэффициент проницаемости в данном случае характеризует способность пористой среды к пропусканию жидкости (по аналогии с коэффициентом теплопроводности). Закон Дарси также называют линейным законом фильтрации, поскольку он устанавливает линейную зависимость между градиентом давления и скоростью фильтрации. Данный закон справедлив для большинства потоков через пористые среды при небольших скоростях движения жидкости. Нарушение этого закона происходит при увеличении скорости потока до критического значения. Это связано с тем, что при скорости потока $u > u_{кр}$ возникают инерционные силы, связанные с изменением поперечных сечений каналов и их извилистостью, или говоря другими словами, когда потери на местных сопротивления становятся сопоставимыми с потерями по длине. Для определения критической скорости можно воспользоваться критериями Рейнольдса, предложенными Павловским Н.Н. [12,13]

$$Re = \frac{ud_s \rho}{(0.75\phi + 0.23)\mu}, \quad (1.10)$$

или Щелкачевым В.Н. [16,17]

$$Re = \frac{10u\sqrt{k}\rho}{\phi^{2.3}\mu}, \quad (1.11)$$

где d_s – эффективный диаметр.

Для зависимости Павловского критическое значение числа Рейнольдса лежит в диапазоне $7,5 \leq Re_{кр} \leq 9$, а для зависимости Щелкачева – $1 \leq Re_{кр} \leq 12$.

При больших скоростях потока, когда происходит нарушение закона Дарси, фильтрационное течение может быть описано нелинейной моделью Форхгеймера [44]

$$\nabla P = -\mu \frac{u}{k} - \frac{c_f}{\sqrt{k}} \rho |u|u, \quad (1.12)$$

где c_f – константа, которая определяется на основе экспериментальных исследований [49].

Другая модель, которая также является расширением классического закона Дарси – уравнение течения Бринкмана [29,31]

$$\nabla P = -\mu \frac{u}{k} + \tilde{\mu} \nabla^2 u; \quad (1.13)$$

где $\tilde{\mu}$ – эффективная вязкость, равная $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\phi\tau}$; τ – коэффициент извилистости.

Модель Бринкмана применяется в тех случаях, когда размер пор сопоставим с размерами пористого пласта.

Помимо вышеперечисленных для описания фильтрационного течения в пористых средах в настоящее время часто применяются модели Козени-Кармана [33,34,54], Берка-Пламмера [65,32] и Эргуна [42].

Среди отечественных ученых внесших значительный вклад в развитие подземной гидромеханики (науки о движении флюидов через пористые среды, преимущественно горные породы) можно выделить Лейбензона Л. С. [8,7], Жуковского Н. Е. [5], Баренблатта Г. И. [3], Басниева К. С. [4], Мирзаджанзаде А. Х. [11] и других.

При исследовании теплопроводности и гидродинамики в пористых материалах модели теплопроводности или фильтрации позволяют определить средние значения скорости, температуры, давления и другие величины. Для вычисления данных параметров в пределах конкретных геометрий и условий применяются дифференциальные уравнения, описывающие процессы течения жидкости или теплопроводности. Краевые задачи для указанных процессов включают основное дифференциальное уравнение (теплопроводности или движения жидкости), начальные и граничные условия. Для решения краевых задач применяются аналитические, приближенные аналитические или численные методы, которые соответствуют виду получаемого решения. К точным аналитическим методам относятся, например, методы разделения переменных, функций Грина, тепловых потенциалов, интегральных преобразований. Приближенные аналитические методы включают в себя вариационные методы (например, методы Ритца, Третьяка) и методы

взвешенных невязок (например, методы Канторовича, Бубнова-Галеркина, коллокаций). К численным методам относятся различные вариации метода конечных разностей (например, метод переменных направлений, метод расщепления, метод дробных шагов), а также методы конечных элементов, объемов и другие.

2. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В главе 2 диссертации описаны принципы генерации трижды периодических минимальных поверхностей, а также метод моделирования теплопроводности в пористых средах с упорядоченной макроструктурой.

В частности, в п.2.1 описан алгоритм построения твердотельной модели трижды периодической минимальной поверхности на примере элементарной ячейки ТПМП Шварца Р. В п.2.2 представлен численно-аналитический метод математического моделирования теплопроводности различных пористых материалов с упорядоченной макроструктурой, особенностью которого является использование оригинального способа вычислительной гомогенизации исследуемой области и определения коэффициентов переноса на основе интерпретации вычислительных и натуральных экспериментов

В п.2.3 на основе зависимостей, полученных в п.2.2, разработана и исследована модифицированная модель теплопроводности в пористых ТПМП-материалах. Для решения краевых задач теплопроводности в пористых ТПМП-материалах в диссертации применяются приближенный аналитический и численно-аналитический методы, в том числе: метод основанный на совместном применении метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок, а также удовлетворении дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля в заданном наборе точек пространственной переменной; метод основанный на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса.

2.1. Создание САД-моделей пористых ТПМП-материалов для исследования теплопроводности

Минимальная поверхность – это поверхность, которая имеет наименьшую возможную площадь охватывающую границу заданного участка. Пленки мыльных пузырей являются примером минимальных поверхностей.

Минимальные поверхности всегда имеют нулевую среднюю кривизну, при которой сумма главных кривизн в каждой точке равна нулю. Наибольший интерес представляют минимальные поверхности, имеющие кристаллическую симметрию, которые периодичны и бесконечны в трехмерном пространстве, иными словами трижды периодические минимальные поверхности (ТПМП).

Трижды периодические минимальные поверхности имеют биологическую природу происхождения и встречаются в морских ежах, крыльях бабочек, экзоскелетах жуков и т.д. Однако, доказано, что ТПМП могут быть точно описаны и сгенерированы при помощи определенных математических функций.

Существует несколько методов генерации ТПМП: параметрический метод, неявный метод и метод граничных условий.

Минимальные поверхности могут быть сгенерированы параметрически с использованием параметризации Эннепера-Вейерштрасса. Это классический способ генерации минимальных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Метод параметризации Эннепера-Вейерштрасса позволяет задать минимальную поверхность с помощью мероморфной функции, которую можно задать на сфере Римана.

Неявный метод определяет поверхность как множество точек с координатами x , y , z в трехмерном пространстве, которые удовлетворяют определенному уравнению $f(x, y, z) = c$. Функция f может иметь любой вид, однако для создания минимальной поверхности она должна быть выбрана таким образом, чтобы описывать поверхность с минимальной площадью между точками и при этом учитывать периодичность поверхности. Примерами таких функций могут быть тригонометрические функции с определенными периодами в каждом из трех измерений.

Самый известный пример трижды периодических минимальных поверхностей – это семейство поверхностей Шварца, которое включает в себя P (Primitive), D (Diamond) и H (Hexagonal) поверхности. Эти поверхности

могут быть определены с помощью соответствующих неявных уравнений, в которых используются функции, удовлетворяющие определенным условиям. Например, для описания ТПМП Шварца P применяется следующая функция:

$$f(x, y, z, s, c) = \cos(x/s) + \cos(y/s) + \cos(z/s) - c, \quad (2.1)$$

где x, y, z – координаты; s, c – параметры, которые используются для изменения структуры поверхности.

Метод граничных условий основан на итеративном уточнении исходной поверхности, определяемой ее границей, с учетом геометрических или физических ограничений. Существует ряд подходов к созданию дискретных минимальных поверхностей с использованием граничного метода. Метод Плато является классическим примером такого подхода. Это вычислительный эквивалент естественного процесса, при котором мыльная пленка, натянутая на проволочную петлю, сводит к минимуму свою площадь для достижения стабильной формы. Данный метод начинается с описания исходной поверхности, обычно многоугольника в R^3 , который итеративно уточняется, чтобы минимизировать площадь полигональной сетки, охватывающей границу поверхности. Чтобы уточнение было эффективным и управляемым, начальная поверхность должна быть как можно более простой, предпочтительно плоской. Исходная поверхность итеративно уточняется до тех пор, пока ни одна вершина триангуляции не может быть перемещена дальше, чтобы уменьшить площадь поверхности.

Основываясь на принципах метода Плато, Кен Бракке [28] разработал Surface Evolver – приложение с открытым кодом, в котором исходная поверхность, представленная упорядоченной многоугольной сеткой, с учетом ограничений итеративно уточняется путем минимизации энергии. Ограничения могут быть геометрическими, накладываемыми на положения вершин и граней, или ограничениями на интегрированные величины, например, объем тела.

В рамках диссертационной работы для генерации трижды периодических минимальных поверхностей применялся метод граничных условий, реализованный в программе с открытым кодом – Surface Evolver.

Процесс создания геометрии трижды периодических минимальных поверхностей для исследования теплопроводности схематично изображен на рис. 2.1 и условно состоит из 3х этапов:

1. Генерация облака точек ТПМП в Surface Evolver.
2. Создание фасетированной поверхности в САД-средствах моделирования.
3. Твёрдотельное моделирование во встроенном в ANSYS редакторе SpaceClaim.

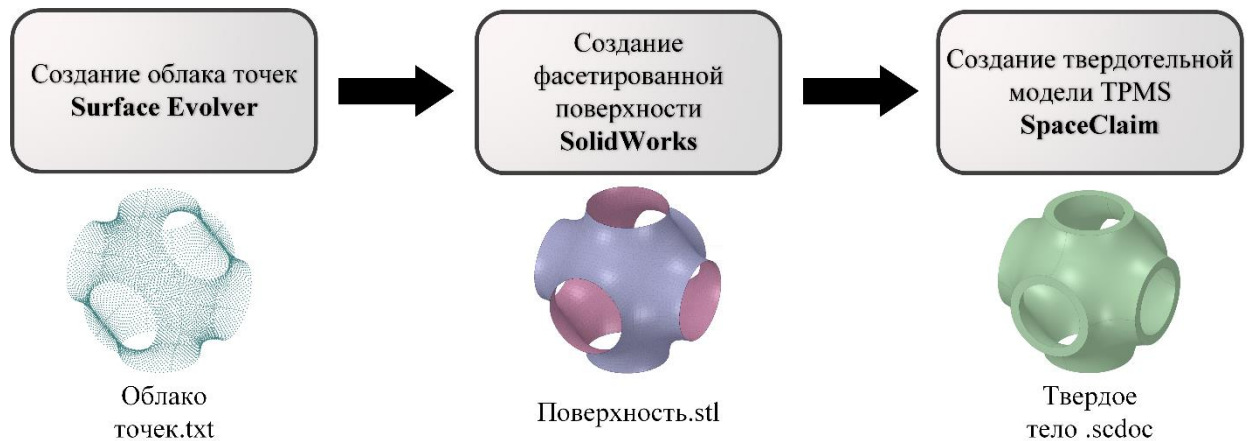


Рисунок 2.1. Схема создания геометрии ТПМП

Для построения трижды периодических минимальных поверхностей применяются встроенные функции программы Surface Evolver, которая с учетом заданных геометрических ограничений преобразует исходную поверхность в поверхность с минимальной площадью. В программе существует большое количество предустановок и скриптов, позволяющих получить облако точек для разнообразных видов ТПМП. При помощи Surface Evolver в диссертации получены трижды периодические минимальные поверхности Шварца P, Шёна I-WP и Неовиуса, изображенные на рисунке 2.2. (а, б, в).

Также в рамках диссертационной работы рассмотрена новая трижды периодическая минимальная поверхность типа TSC (рис. 2.2. г), построенная при помощи программы ToposPro [27].

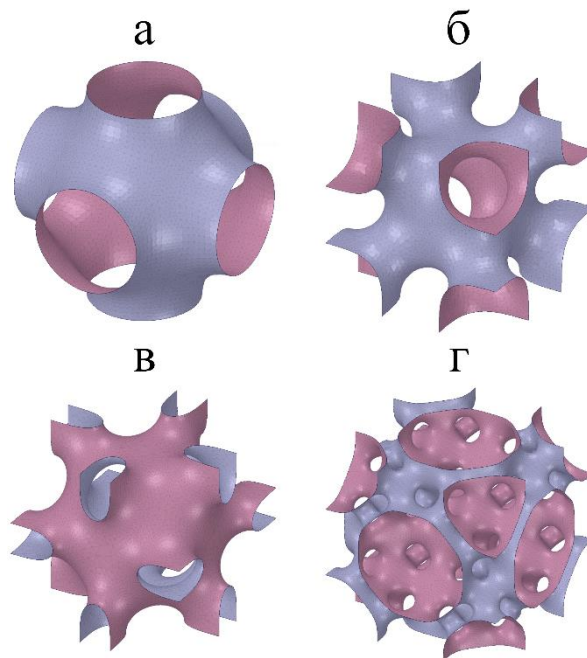


Рисунок 2.2. Рассматриваемые в диссертации ТПМП:

а) Шварца P; б) Шёна I-WP; в) Неовиуса; г) TSC

Процесс построения поверхности из облака точек и преобразование поверхности в твердое тело более подробно рассмотрим на ТПМП Шварца P.

Облако точек, полученное в Surface Evolver, импортируется в программу SolidWorks, где оно преобразуется в поверхность с помощью функций модуля «Scan to 3D». После упрощения и сглаживания сетки поверхность экспортируется в виде файла с разрешением .STL. Полученная фасетированная поверхность импортируется в программу для твердотельного моделирования SpaceClaim Direct Modeler, где с помощью встроенных функций формируется сплошной слой толщиной δ (рис. 2.3. а).

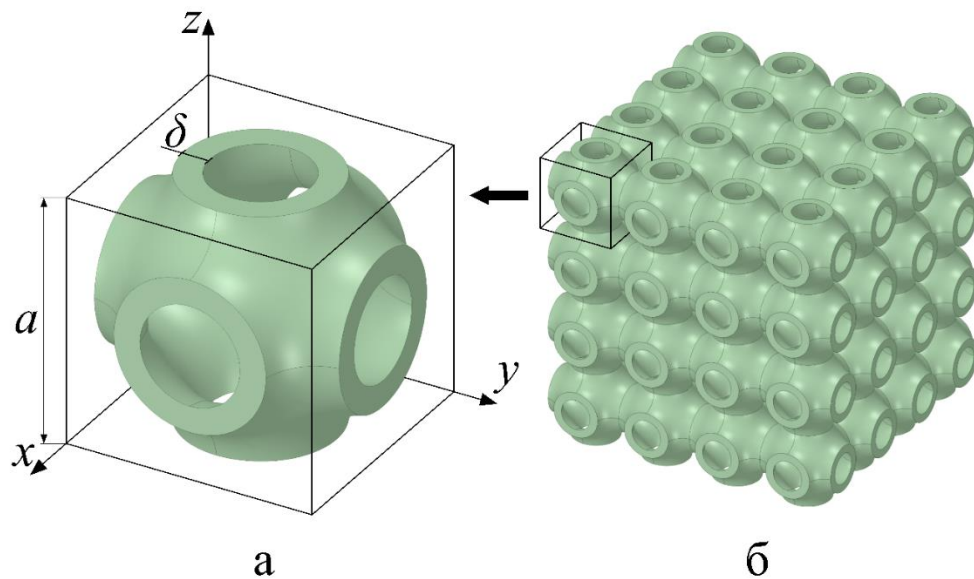


Рисунок 2.3. Трижды периодическая минимальная поверхность Шварца P:
 а) элементарная ячейка; б) пористый материал с упорядоченной структурой
 (решетка)

Стоит отметить, что геометрия, изображенная на рис. 2.3. (а) является элементарной ячейкой трижды периодической минимальной поверхности Шварца P, как и другие ячейки на рисунке 2.2. Общей особенностью всех изображенных элементарных ячеек является то, что они обладают кубической симметрией и точно вписываются в куб с длиной ребра a . Данное свойство позволяет использовать различные методы гомогенизации пористых сред при исследовании их теплопроводящих свойств.

На рисунке 2.3. (б) изображен пористый материал со структурой, основанной на ТПМП Шварца P, который получается в результате трансляции элементарных ячеек вдоль трех ортогональных направлений декартовой системы координат (ox, oy, oz) с периодом равным длине ребра куба.

2.2. Разработка метода моделирования теплопроводности в пористых материалах на основе интерпритации результатов вычислительных экспериментов

2.2.1. Численно-аналитический метод определения теплопроводности материала со структурой, основанной на ТПМП Шварца Р

Прогнозирование тепловых свойств пористых материалов является важной задачей теоретической и прикладной теплофизики. Несмотря на упорядоченную макроструктуру тепловые свойства материалов со структурой, основанной на ТПМП, не могут считаться изотропными. Значения коэффициентов переноса, характеризующих теплообмен, различны в различных точках среды и зависят от направления теплопереноса. Для изотропных тел теплофизические свойства могут быть идентифицированы путем решения обратной задачи теплопроводности. Однако, задача существенно осложняется в случае рассмотрения негомогенных структур, обладающих высокой степенью анизотропии.

Закон Фурье в анизотропных средах в общем случае формулируется в виде

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (2.2)$$

где \mathbf{q} – вектор плотности теплового потока; $\lambda = [\lambda_{ij}]$ ($i, j = \overline{1,3}$) – симметричный тензор теплопроводности второго ранга; T – температура.

Поскольку теплопроводность λ является не скалярной величиной, а тензорной, тепловые потоки в каждой точке исследуемой области различны в различных направлениях. Однако в диссертации рассматривается метод осреднения теплофизических свойств в пределах исследуемого объема, согласно которому рассматривается не истинное значение теплопроводности λ , а некоторое осредненное – эффективный коэффициент теплопроводности $\lambda_{эфф}$, имеющий постоянное значение во всех точках пористой среды.

С целью осреднения свойств в диссертации используется метод RVE (representative volume element), согласно которому в пористых или

композиционных материалах можно выделить такой минимальный объем, который демонстрирует свойства (тепловые, механические, электромагнитные и др.), идентичные свойствам всего материала. В рассматриваемом пористом ТПМП-материале, основанном на ТПМП Шварца типа Р, элементарным объемом является куб, в который вписана элементарная ТПМП ячейка. Схема элементарного объема (куба) с вписанной в нее единичной ячейкой представлена на рис. 2.4.

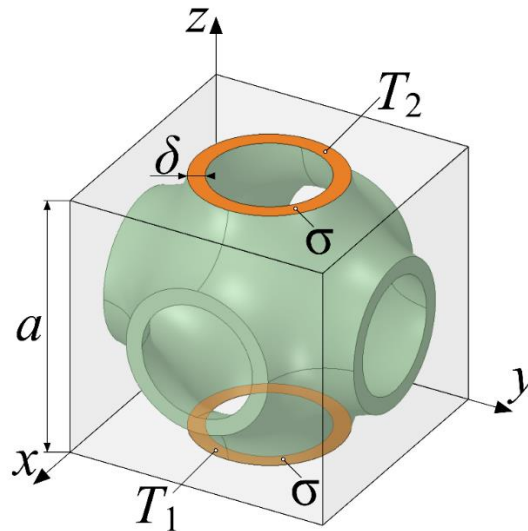


Рисунок 2.4. Схема ячейки

Для определения тепловых характеристик элементарного объема будем считать, что теплофизические свойства в любой точке объема изотропны. То есть считаем, что исследуемый объем заполнен однородной средой с $\lambda_{эфф} = \text{const}$, где $\lambda_{эфф}$ – эффективный коэффициент теплопроводности. В случае, если перенос тепла осуществляется лишь вдоль оси z , тепловой поток Q через любое ортогональное сечение элементарного объема определяется соотношением

$$Q = \overline{q_s} S, \quad (2.3)$$

где

$$\overline{q_s} = \frac{1}{S} \int_{\sigma} q d\sigma, \quad (2.4)$$

$\overline{q_s}$ – средняя плотность теплового потока в сечении $S = a^2$; q – фактическая плотность теплового потока в сечении $\sigma = S(1-s)$; $s = S_l/S$ – просветность; S_l – площадь просветов. В соотношениях (2.3), (2.4) и далее опущен нижний индекс «z», указывающий на то, что рассматривается z-компонента вектора плотности теплового потока q_z .

С другой стороны, согласно гипотезе Фурье

$$\overline{q_s} = -\lambda_{эфф} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.5)$$

При стационарном режиме переноса тепла распределение температуры в гомогенизированной среде вдоль координаты z изменяется по линейному закону. Тогда справедливо соотношение

$$\overline{q_s} = -\lambda_{эфф} \frac{T_2 - T_1}{a}. \quad (2.6)$$

Учитывая, что $S = a^2$ из (2.4), (2.6) следует

$$\lambda_{эфф} = \frac{\overline{q_s} a}{T_1 - T_2} = \frac{\int_{\sigma} q d\sigma}{a(T_1 - T_2)}. \quad (2.7)$$

Для определения фактического значения теплового потока в сечении, перпендикулярном оси z , используем структурную характеристику среды – просветность s . Очевидно, что средняя плотность теплового потока в любой точке сечения σ больше аналогичной величины в сечении S

$$\overline{q_{\sigma}} = \frac{\overline{q_s}}{1-s}, \quad (2.8)$$

где $\overline{q_{\sigma}}$ – среднее значение плотности теплового потока в сечении σ . Величина $\overline{q_{\sigma}}$ определяется по результатам численного расчета в ANSYS (average heat flux).

Учитывая (2.8), эффективная теплопроводность определяется по формуле [98,100,102]

$$\lambda_{\text{эфф}} = \frac{\overline{aq_{\sigma}}(1-s)}{T_1 - T_2}. \quad (2.9)$$

Решение задачи теплопроводности для определения средней плотности теплового потока $\overline{q_{\sigma}}$ осуществляется методом конечных элементов в модуле Steady-State Thermal программного комплекса ANSYS. При численном решении задачи принят следующий ряд допущений:

1. Режим теплопереноса – стационарный;
2. Перенос тепла осуществляется вдоль одной из осей ортогональной системы координат (оси z);
3. На верхней и нижней гранях элементарной ячейки заданы граничные условия первого рода – температуры T_1 и T_2 соответственно (см. рис. 2.4);
4. На всех поверхностях элементарной ячейки (кроме верхней и нижней грани) задано условие адиабатной стенки;
5. Теплофизические свойства материала, из которого состоит элементарная ячейка известны (см. табл. 2.1) и постоянные (не зависят от температуры).

В качестве материалов, из которых изготовлена элементарная ячейка при численном моделировании, выбраны пластик PETG и фотополимерная смола, свойства которых представлены в таблице 2.1. Данные материалы являются одними из самых распространенных в 3D-печати и дальнейшее изготовление экспериментальных образцов для верификации новой модели выполнено из этих материалов.

Таблица 2.1. Теплофизические свойства материалов

Материал	Теплопроводность	Теплоемкость	Плотность
Пластик PETG	0,2 Вт/(м°С)	1050 Дж/(кг·К)	1300 кг/м ³
Фотополимерная смола	0,375 Вт/(м°С)	800 Дж/(кг·К)	1412 кг/м ³

На рис. 2.5. представлен график зависимости погрешности результатов численного моделирования в процентах от количества элементов сетки. Исходя из анализа сеточной сходимости было определено, что оптимальным является решение на сетке, состоящей из $\approx 2,5$ млн. элементов. На рис 2.6. изображена сетка для численного решения задачи теплопроводности методом конечных элементов в элементарной ячейке ТПМП Шварца Р.

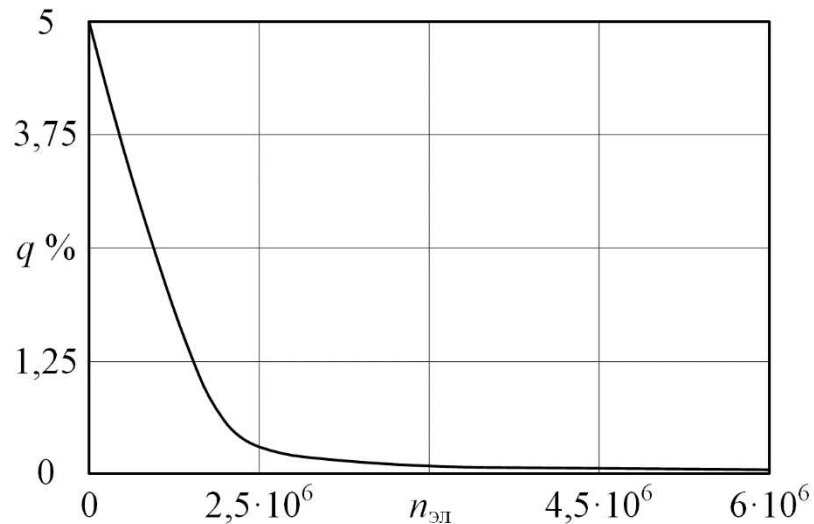


Рисунок 2.5. График сеточной сходимости.

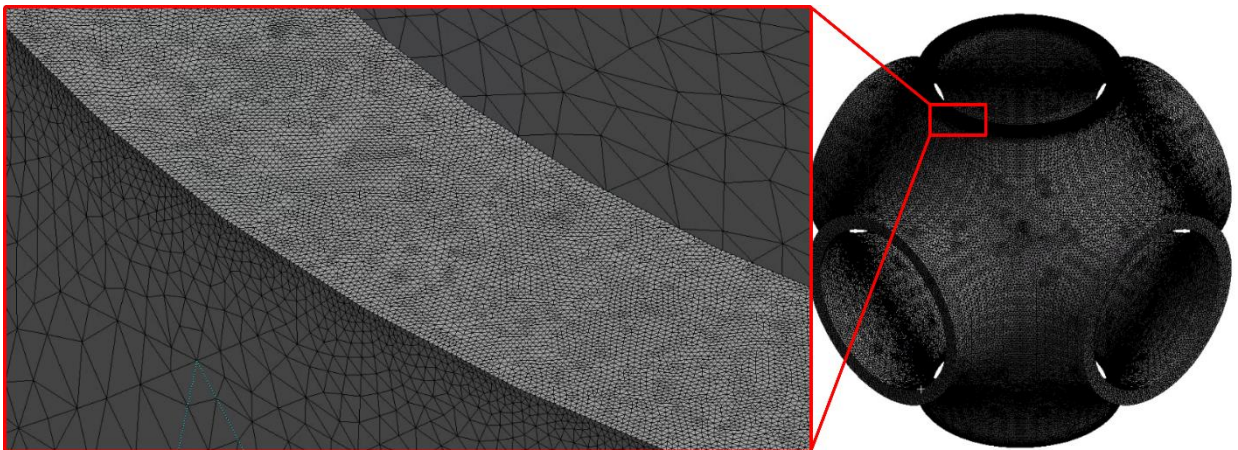


Рисунок 2.6. Конечно-элементная сетка

На рис. 2.7 приведены результаты расчетов скалярного поля температуры и векторного поля теплового потока. Используя соотношение (2.9), были определены значения коэффициентов эффективной теплопроводности для различных конфигураций элементарной ячейки. В

частности, было исследовано поведение функции $\lambda_{эфф}(a; \delta)$ при изменении ее аргументов – размера элементарной ячейки и ее толщины (см. рис. 2.8, 2.9).

Наибольший интерес представляют линейные участки изменения $\lambda_{эфф}$, которые лежат в диапазоне малых значений относительной толщины φ . Это связано с практическим интересом применения пористых ТПП-материалов в качестве тепловой изоляции, где важным параметром является низкая эффективная теплопроводность.

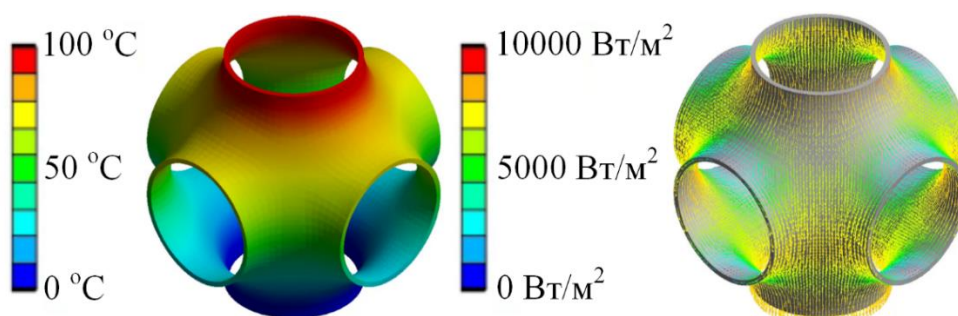


Рисунок 2.7. Распределение температуры (слева) и тепловых потоков (справа) в элементарной ячейке

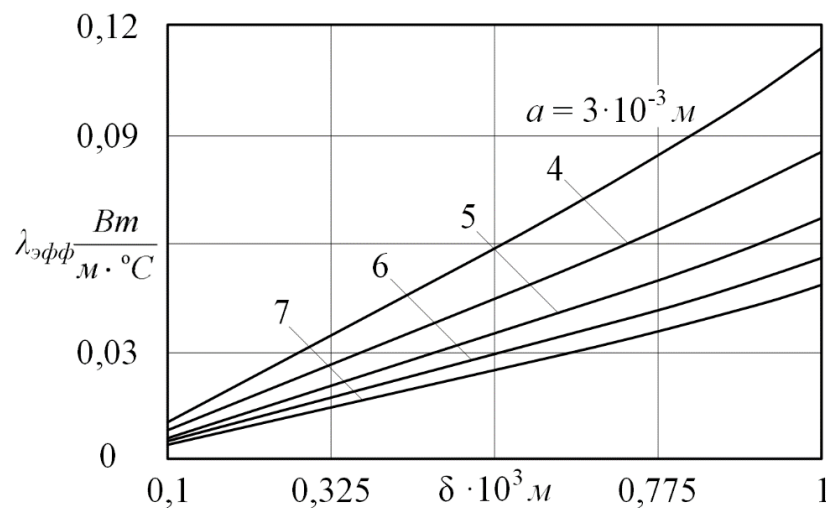


Рисунок 2.8. График зависимости эффективной теплопроводности от толщины стенки ячейки (для пластика PETG)

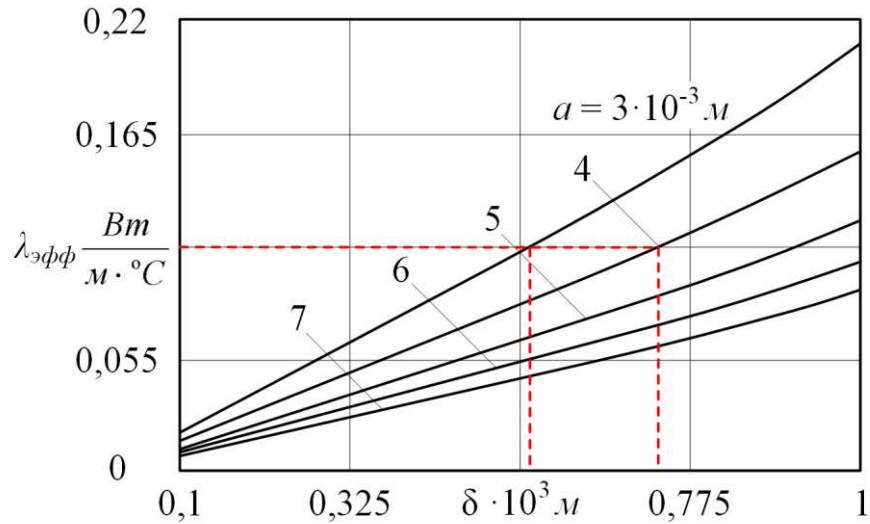


Рисунок 2.9. График зависимости эффективной теплопроводности от толщины стенки ячейки (для фотополимерной смолы)

Важно отметить, что на линейном участке изменения $\lambda_{эфф}$ масштабирование элементарной ячейки приводит к пропорциональному изменению $\lambda_{эфф}$. Например, $\lambda_{эфф}(a; \delta) = 2\lambda_{эфф}(2a; \delta)$. Это следует из закона квадрата – куба. В этом случае необходимое значение $\lambda_{эфф}$ может быть получено путем изменения толщины стенки ячейки δ или размера элементарной ячейки a . Например, значение $\lambda_{эфф} = 0,11$ (рис. 2.9) может быть получено при толщине стенки ячейки $\delta = 0,00055$ м и $a = 0,003$ м, либо при $\delta = 0,0007$ м и $a = 0,004$ м и т. д. Кроме того, данное свойство позволяет построить универсальный график зависимости эффективной теплопроводности от относительной толщины $\varphi = \delta/a$ (см. рис. 2.10)

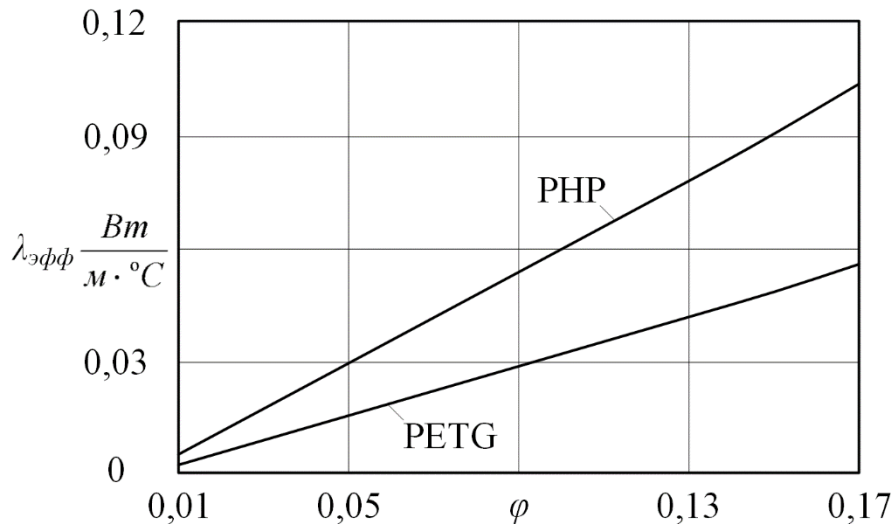


Рисунок 2.10. График зависимости эффективной теплопроводности от относительной толщины

Зависимость, изображенная на графике на рис. 2.10 позволяет прогнозировать эффективную теплопроводность пористого материала со структурой, основанной на ТПМП Шварца Р, в зависимости от характерных геометрических параметров (размер ячейки, толщина стенки ячейки). Однако, при выборе конфигурации пористого материала необходимо учитывать требуемые показатели прочности. Так, измельчение ячеек приводит к упрочнению материала. С другой стороны, повышаются требования к характеристикам оборудования при изготовлении пористой среды. Важно отметить, что с увеличением размера ячейки усиливается влияние конвективной составляющей, однако оно не учитывалось в рамках данного исследования.

2.2.2. Определение эффективной теплопроводности группы ТПМП-материалов

В соответствии с методикой, описанной в п. 2.2.1, в диссертации получены зависимость эффективной теплопроводности от относительной толщины для группы пористых материалов, основанных на ТПМП Шварца Р, Шёна I-WP, Невиуса и TSC (рис. 2.11).

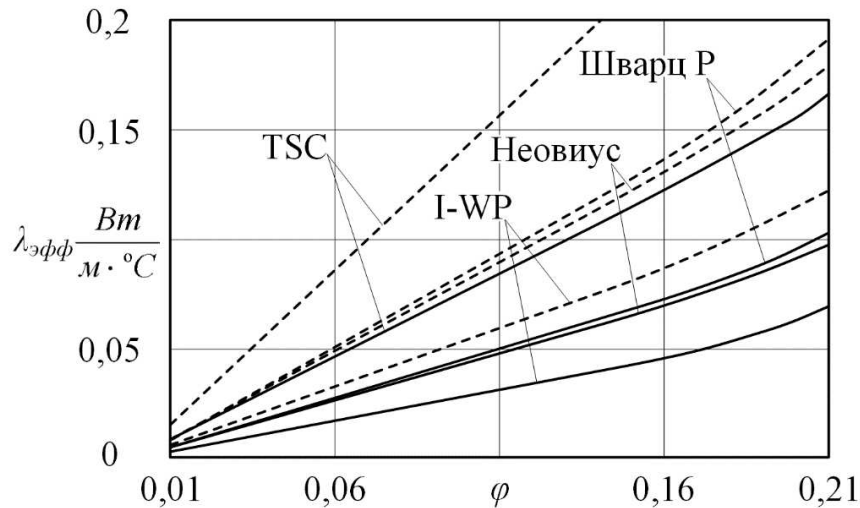


Рисунок 2.11. График зависимости эффективной теплопроводности от относительной толщины: — — — RHP; ——— PETG

Важным структурным параметром для пористых материалов является пористость. Для определения пористости материалов с ТПМП структурой запишем следующее выражение

$$\phi = \frac{V_n}{V}, \quad (2.10)$$

где ϕ – пористость; V_n – объем пустот; V – объем всего материала.

Построим график зависимости эффективной теплопроводности рассматриваемых материалов от пористости (рис. 2.12).

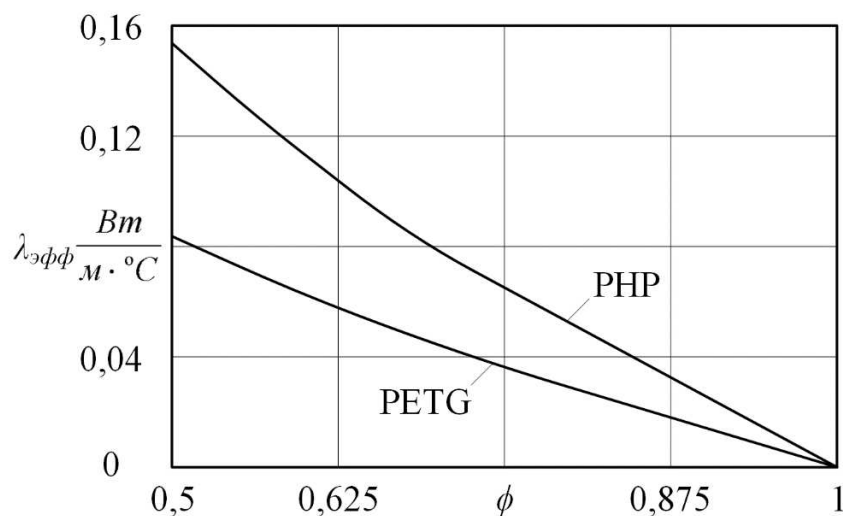


Рисунок 2.12. График зависимости эффективной теплопроводности от пористости

Из анализа рисунка 2.12 видно, что зависимость эффективной теплопроводности от пористости также имеет линейный вид при пористости близкой к 1. При этом линейный диапазон $\lambda_{эфф}$ может быть аппроксимирован функцией вида

$$\lambda_{эфф} = \lambda_m[k_1(1-\phi)] \quad (\phi_{лин} \leq \phi \leq 1), \quad (2.11)$$

при следующей зависимости пористости от относительной толщины

$$\phi = 1 - k_2\varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_{лин}, \quad (2.12)$$

где k_1, k_2 – константы, которые зависят от типа ТПМП.

Зависимости (2.11) и (2.12), полученные для одной элементарной ячейки, справедливы для всего пористого ТПМП-материала, состоящего из любого числа ячеек.

Значения коэффициентов k_1 и k_2 для зависимостей (2.11), (2.12) представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.2. Значения констант

k_1	k_2			
	Шварца Р	I-WP	Неовиуса	TSC
0,73	2,3067	3,4097	3,4081	4,4392

2.2.3. Экспериментальная верификация

С целью верификации, полученных в п. 2.2.1-2.2.2 результатов, в рамках диссертационной работы было выполнено экспериментальное исследование теплопроводности пористых ТПМП-материалов. Используя технологию аддитивной печати, были изготовлены образцы пористых материалов со структурой, основанной на ТПМП Шварца Р, из пластика PETG и фотополимерной смолы. Образцы представляют из себя пластины размером 200x200x20 мм и состоят из одинаковых элементарных ячеек с длиной ребра куба $a = 0,005$ м (рис. 2.13). Свойства материалов, из которых изготовлены образцы представлены в таблице 2.1.

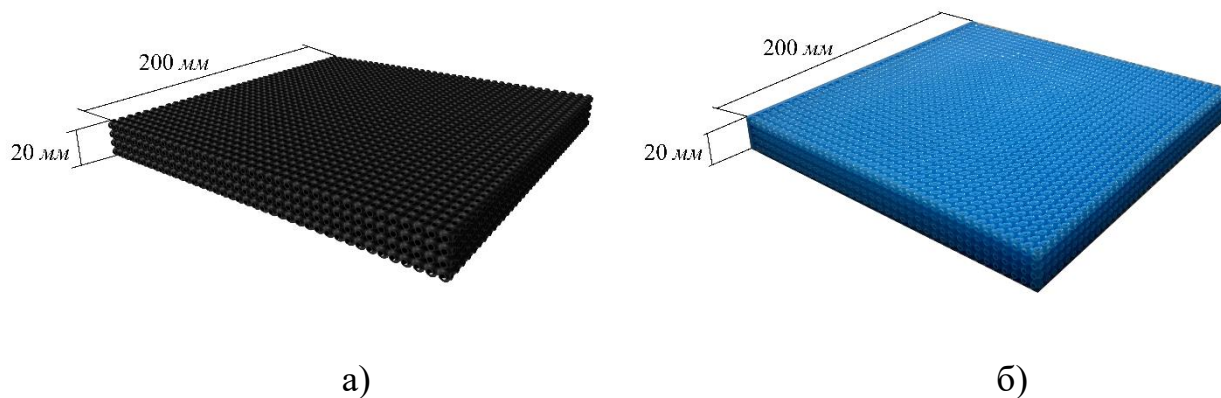


Рисунок 2.13. Образцы пористого материала со структурой, основанной на ТПМП Шварца Р: а) РЕТГ; б) фотополимерная смола

Эксперимент по определению эффективной теплопроводности проводился на сертифицированной установке ИТП-МГ4 «250». На рис. 2.14 изображена схема установки, основными элементами которой являются: нагреватель, охлаждающая система, теплоизолированная камера и электронный блок.

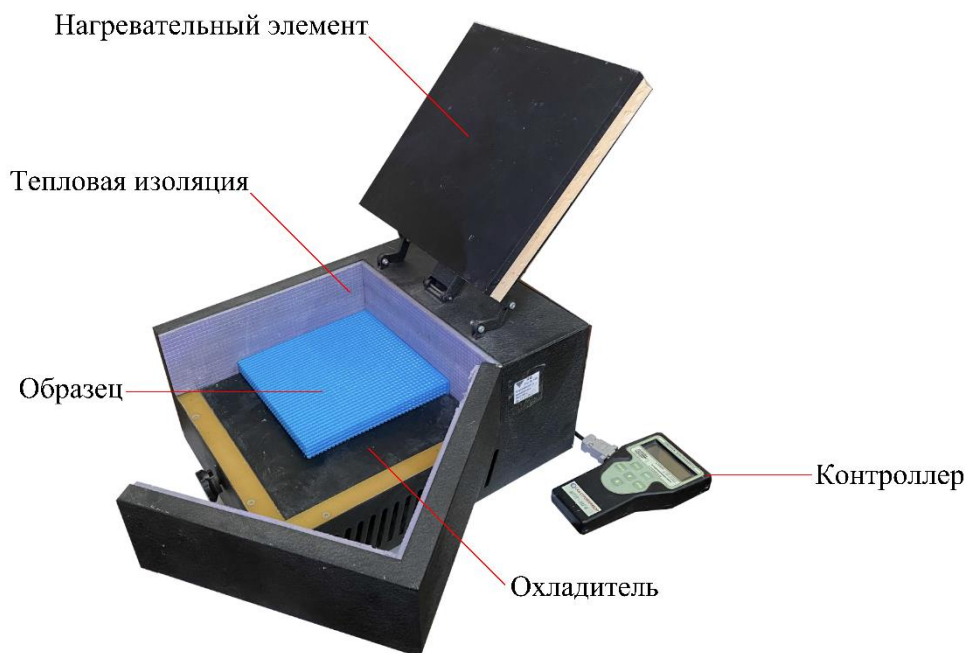


Рисунок 2.14. Установка для измерения теплопроводности ИТП-МГ4 «250»

Принцип измерения теплопроводности на данной установке следующий. Через помещенное в теплоизолированную камеру тело проходит

тепловой поток, который возникает в результате разницы температур на верхней и нижней гранях тела. Процесс измерения теплового потока происходит на стационарном режиме, который поддерживается нагревательным элементом и охлаждающей системой. В соответствии с законом Фурье контроллер определяет теплопроводность образца исходя из известного теплового потока, толщины образца и разницы температур.

Результаты экспериментального определения эффективной теплопроводности образцов со структурой ТППП Шварца Р в сравнении со значениями, полученными по формуле (2.11), представлены на рис. 2.15.

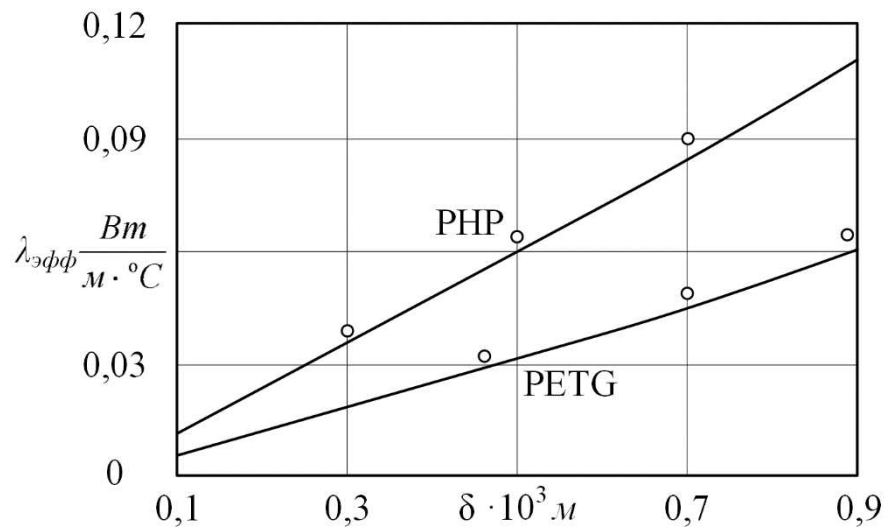


Рисунок 2.15. График зависимости эффективной теплопроводности от толщины стенки ячейки при $a = 0,005$ м: ——— зависимость (2.11);

о о о о эксперимент

Исходя из анализа рис. 2.15 можно определить расхождение между экспериментальными значениями эффективной теплопроводности и значениями, полученными по формуле (2.11), которое достигает 8% (по норме Чебышева) при толщине $\delta = 0,0009$ м. Погрешность вызвана влиянием конвекции и теплопроводности воздуха, которые не учитывались при численном моделировании в программном комплексе ANSYS.

2.2.4. Определение теплопроводности пористого материала с цилиндрическими полостями

В промышленности широко используются конструкционные материалы с различного рода отверстиями или полостями. К таким материалам относится, например, бетонные плиты с отверстиями, которые часто используются в качестве перекрытий в многоэтажных постройках. Для данных материалов помимо прочностных характеристик важным параметром является теплопроводность, которая важна при расчете систем отопления и кондиционирования. В диссертации предлагаются новые универсальные аналитические зависимости для определения эффективной теплопроводности материала с цилиндрическими полостями. Зависимости позволяют определить эффективную теплопроводность рассматриваемого материала при известных геометрических параметрах полостей и известной теплопроводности исходного материала.

Рассмотрим материал с цилиндрическими полостями в виде неограниченной в направлениях x и y стенки толщиной D с отверстиями диаметром $d_{\text{ц}}$ и введем в рассмотрение следующую геометрию в трёх мерном пространстве, представленную на рисунке 2.16 [108].

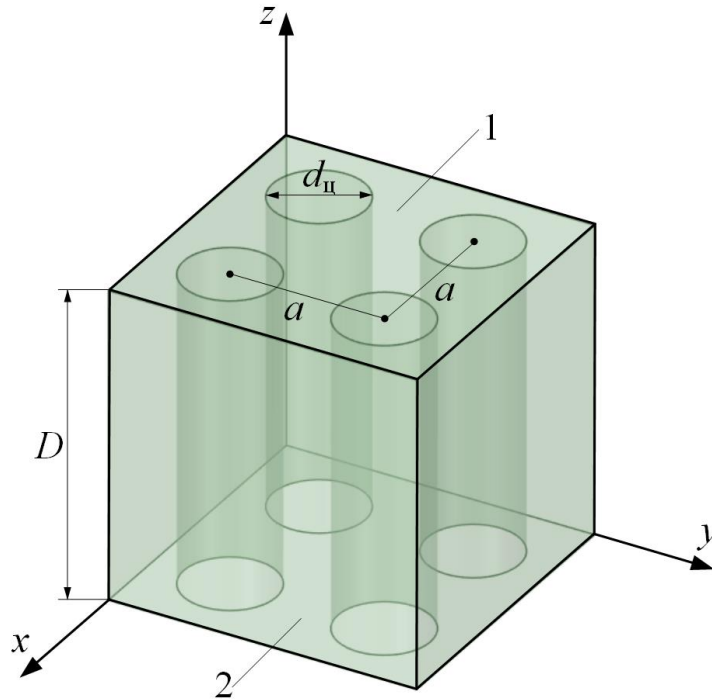


Рисунок 2.16. Исследуемая геометрия

Цилиндрические отверстия располагаются параллельно оси z и на одинаковом расстоянии друг от друга a в направлениях осей x и y . Диаметр цилиндра при этом может изменяться в диапазоне $0 < d_{ц} \leq a$

Рассмотрим задачу теплообмена, когда на верхней и нижней поверхностях (1 и 2 на рис. 2.16) заданы граничные условия первого рода, соответственно T_1 и T_2 . В таком случае тепловой поток в стенке будет направлен вдоль оси z . Для определения теплового потока по закону Фурье запишем следующее выражение

$$\bar{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.13)$$

где \bar{q} – плотность теплового потока; λ – теплопроводность; $\partial T / \partial x$ – градиент температуры.

Выражение (2.13) применительно к рассматриваемой геометрии (рис. 2.16) может быть записано в виде

$$\bar{q}_z = -\lambda_{эфф} \frac{(T_1 - T_2)}{D}, \quad (2.14)$$

где D – толщина стенки; T_1, T_2 – граничные условия первого рода на нижней и верхней гранях геометрии соответственно; $\lambda_{эфф}$ – эффективная теплопроводность материала с цилиндрическими полостями.

Для определения эффективной теплопроводности согласно методу RVE выделим в рассматриваемой геометрии элементарный объем (рис. 2.17), который будет воспроизводить свойства всей геометрии.

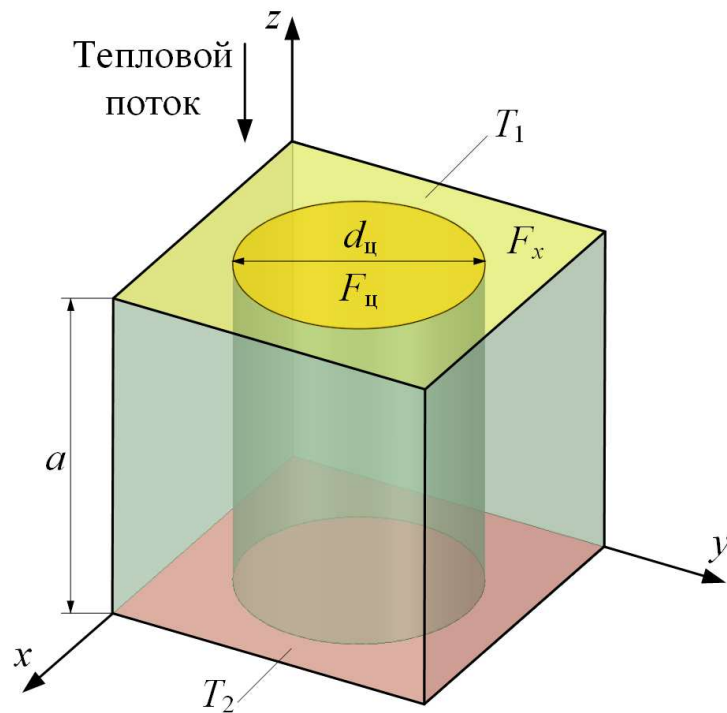


Рисунок 2.17. Элементарный объем

В данном случае элементарным объемом является куб с ребром a (параметр a так же равен расстоянию между цилиндрами в исходной геометрии, изображенной на рис. 2.16). В центре куба параллельно оси z располагается цилиндр высотой a с диаметром $d_{ц}$. На верхней (желтой) и нижней (красной) гранях аналогично исходной геометрии задаются граничные условия первого рода T_1 и T_2 .

Тепловой поток через любое поперечное сечение куба будет определяться выражением

$$Q = Q_{\text{ц}} + Q_x, \quad (2.15)$$

где $Q_{\text{ц}}$ – тепловой поток через поверхность $F_{\text{ц}}$; Q_x – тепловой поток через поверхность F_x .

Учитывая теплопроводность воздуха, который заполняет цилиндрическое пространство, выражение (2.15) примет вид

$$\lambda_{\text{эфф}} \frac{(T_1 - T_2)}{a} F = \lambda_a \frac{(T_1 - T_2)}{a} F_{\text{ц}} + \lambda_m \frac{(T_1 - T_2)}{a} F_x, \quad (2.16)$$

где λ_m – теплопроводность материала; λ_a – теплопроводность воздуха; $F = a^2$

– площадь поверхности грани куба; $F_{\text{ц}} = \frac{\pi d_{\text{ц}}^2}{4}$ – площадь поверхности

основания цилиндра; $F_m = a^2 - \frac{\pi d_{\text{ц}}^2}{4}$ – площадь поверхности за вычетом

площади основания цилиндра.

Так как тепловой поток в рассматриваемом случае направлен строго вдоль оси z , то плотность теплового потока $\overline{q_z}$ одинакова в любом поперечного сечения куба. Тогда теплопроводность материала с цилиндрическими полостям с учетом теплопроводности воздуха, заполняющего пустоты, будет определяться как

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_a \left[\frac{\pi}{4} (d_{\text{отн}})^2 \right] + \lambda_m \left[1 - \frac{\pi}{4} (d_{\text{отн}})^2 \right], \quad (2.17)$$

где $d_{\text{отн}} = \frac{d_{\text{ц}}}{a}$ – относительный диаметр.

Вместо теплопроводности воздуха в выражении (2.17) можно использовать значение теплопроводности любого другого материала, заполняющего цилиндрические полости. При определении теплопроводности исключительно каркаса без учета воздуха в полостях применяется следующее выражение

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_m \left[1 - \frac{\pi}{4} (d_{\text{отн}})^2 \right]. \quad (2.18)$$

Для верификации зависимостей (2.17) и (2.18) в рамках исследования было выполнено CAE-моделирование теплопроводности в материале с цилиндрическими полостями. При численном моделировании использовался модуль Steady-State Thermal программного комплекса ANSYS. В соответствии с RVE элементом была построена расчетная геометрия. Конечно-элементная сетка для решения задачи представлена на рис. 2.18 и состоит из ≈ 3 -4 миллиона элементов (в зависимости от диаметра цилиндра). На рисунке 4 изображен график сходимости сетки. Следует отметить, что при 3 млн. элементов сетки погрешность не превышает 2%. При дальнейшем увеличении количества элементов сетки вычислительный процесс значительно усложняется, однако ощутимый рост точности решения не наблюдается.

Свойства материалов, которые использовались при численном моделировании в ANSYS представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Свойства материалов

Материал	Теплопроводность	Теплоемкость	Плотность
Цемент	0,327 Вт/(м ^{°С})	1000 Дж/(кг·К)	2250 кг/м ³
Воздух	0,0242 Вт/(м ^{°С})	1006 Дж/(кг·К)	1,225 кг/м ³

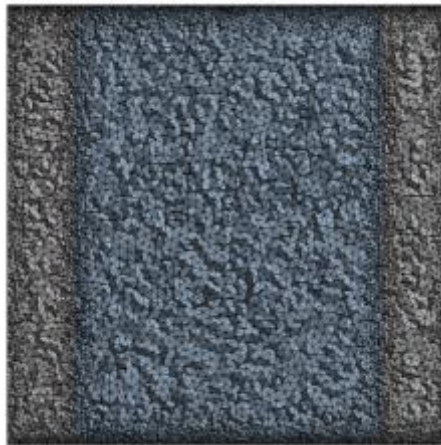


Рисунок 2.18. Конечно-элементная сетка

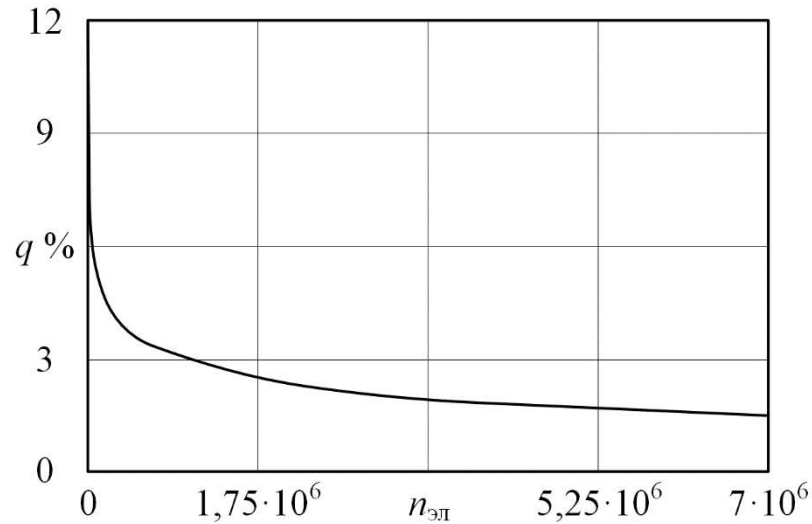


Рисунок 2.19. График сходимости сетки.

В результате численного решения методом конечных элементов задачи теплопроводности в материале с цилиндрическими полостями получены значения плотности теплового потока $\overline{q_z}$ на верхней и нижней гранях (где задаются граничные условия). В соответствии с законом Фурье (2.13) для определения эффективной теплопроводности воспользуемся следующей зависимостью

$$\lambda_{эфф} = \frac{\overline{q_z} a}{(T_1 - T_2)}. \quad (2.19)$$

Результаты определения эффективной теплопроводности материала с цилиндрическими полостями при помощи зависимости (2.17) и численного решения методом конечных элементов представлены на рисунках 2.20, 2.21.

На графиках изображена зависимость эффективной теплопроводности от диаметра цилиндров. Из анализа графиков видно, что численное решение в ANSYS отличается от аналитического решения по формуле (2.17) не более чем на 2%. Данное расхождение напрямую связано с точностью конечно-элементной сетки.

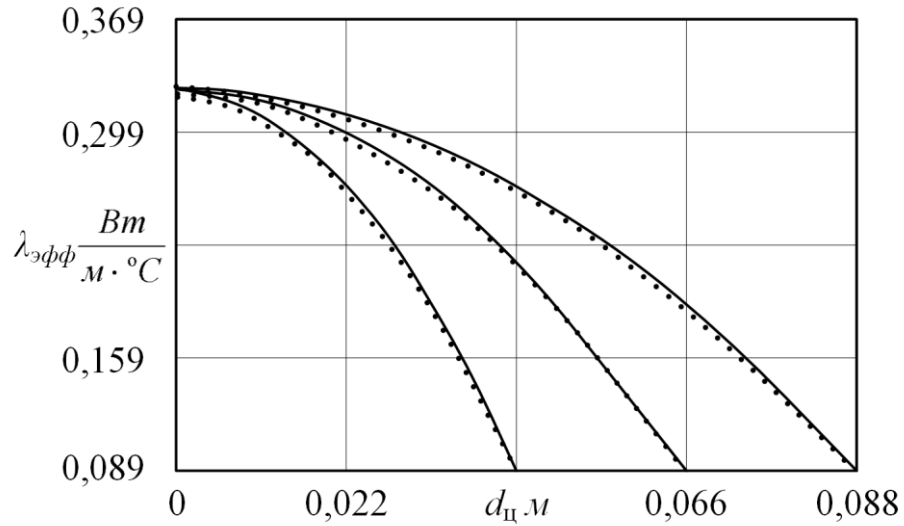


Рисунок 2.20. График зависимости эффективной теплопроводности от диаметра цилиндра (с воздухом): •••• МКЭ; ——— зависимость (2.17)

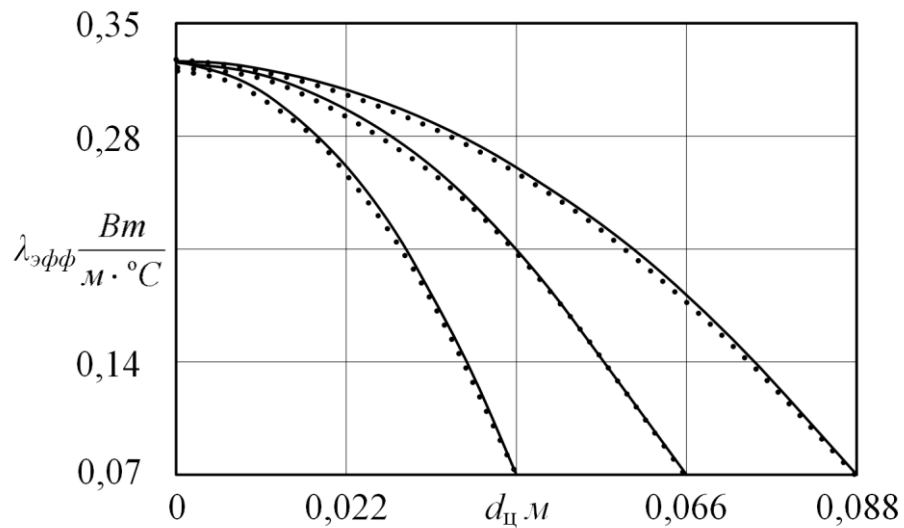


Рисунок 2.21. График зависимости эффективной теплопроводности от диаметра цилиндра (без воздуха) : •••• МКЭ; ——— зависимость (2.17)

Так же были получены графики зависимости эффективной теплопроводности от относительного диаметра $d_{отн}$ (рис. 2.22, 2.23).

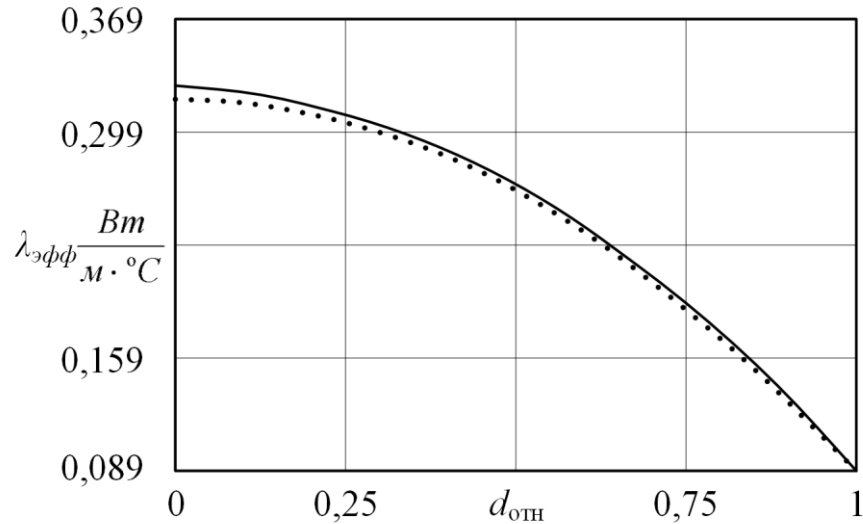


Рисунок 2.22. График зависимости эффективной теплопроводности от относительного диаметра (с воздухом) : •••• МКЭ; ——— зависимость (2.17)

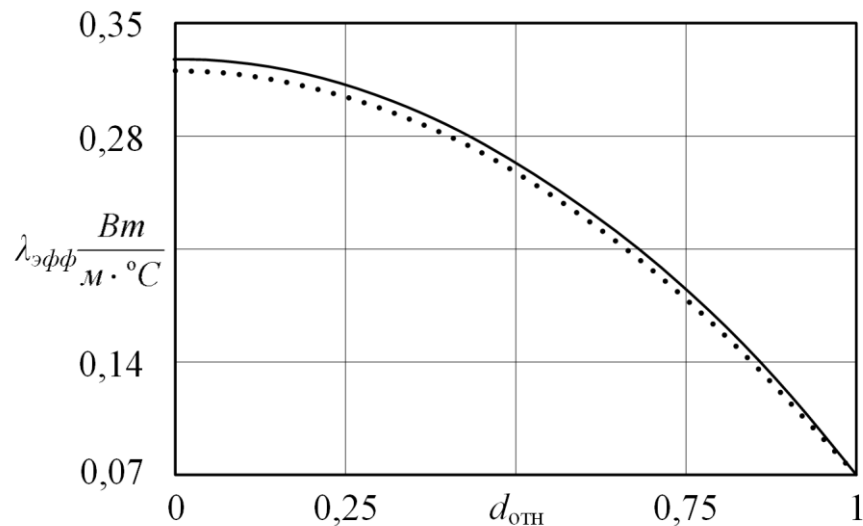


Рисунок 2.23. График зависимости эффективной теплопроводности от относительного диаметра (без воздуха) : •••• МКЭ; ——— зависимость (2.17)

В рамках исследования был выполнен эксперимент по определению эффективной теплопроводности материала с цилиндрическими полостями при помощи установки ИТП-МГ4 «250». Для исследования был изготовлен образец из цемента размером 0,22x0,22x0,04 м с цилиндрическими полостями диаметром $d_{ц} = 0,01$ м.

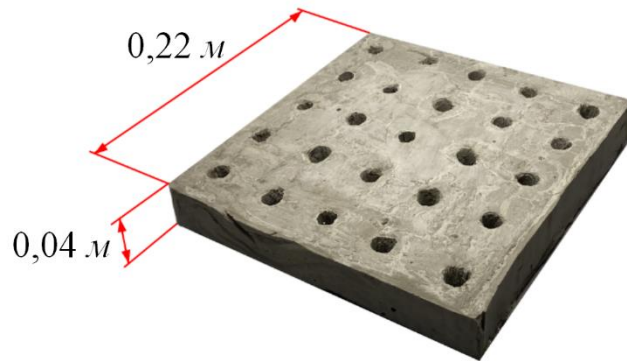


Рисунок 2.24. Образец материала с цилиндрическими полостями

Над образцом, изображенном на рисунке 2.24, было выполнено 5 измерений по результатам которых получено среднее экспериментальное значение эффективной теплопроводности. Результаты экспериментального исследования в сравнении с численным и аналитическим решением представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4. Результаты исследования

	Эксперимент	МКЭ	Аналитическое решение
Эффективная теплопроводность	0,316 Вт/(м°С)	0,309 Вт/(м°С)	0,313 Вт/(м°С)

Из анализа результатов следует, что расхождение между аналитическим и экспериментальным значением эффективной теплопроводности не превышает 1%.

Полученные в диссертации зависимости (2.17) и (2.18) позволяют определить значения эффективной теплопроводности материала с цилиндрическими полостями при условии, что теплообмен со направлен с осью цилиндров. Кроме того, решение обратной задачи позволяет определить геометрические параметры материала (диаметр цилиндров и расстояние между ними) при заданной эффективной теплопроводности.

2.2.5. Определение теплопроводности пористого материала с шарообразными полостями

В диссертации разработан численно-аналитический метод определения эффективной теплопроводности пористого материала с упорядоченно расположенными шарообразными порами [107].

Существует множество классических теорий для определения коэффициента эффективной теплопроводности пористых и других материалов, структура которых содержит полости или включения иных материалов. Например, Руссель и Эйкен представляют пористую среду как особый вид структуры, которая разбивается на элементарные кубы со сферическими полостями внутри, заполненными воздухом (см. рис. 2.25).

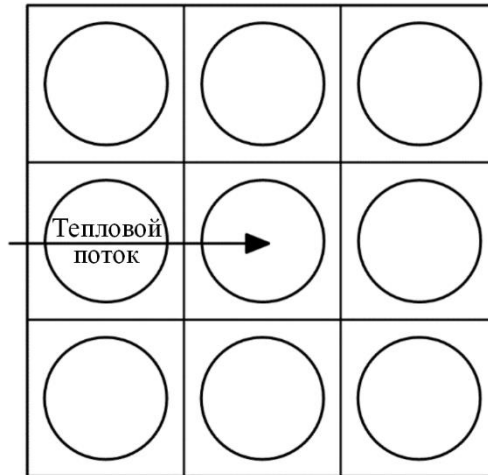


Рисунок 2.25. Схема пористой среды Русселя и Эйкана

В результате рассмотрения схемы (рис. 2.25) Руссель предлагает следующую зависимость для определения эффективной теплопроводности

$$\frac{\lambda_{эфф}}{\lambda_m} = \frac{\phi^{2/3} + \frac{\lambda_m}{\lambda_a}(1 - \phi^{2/3})}{\phi^{2/3} - \phi + \frac{\lambda_m}{\lambda_a}(1 - \phi^{2/3} + \phi)}, \quad (2.20)$$

где $\lambda_{эфф}$ – коэффициент эффективной теплопроводности пористого материала; λ_m – коэффициент теплопроводности твердой фазы; λ_a – коэффициент теплопроводности воздуха внутри пор; ϕ – пористость.

В свою очередь Эйкен предлагает другую зависимость

$$\frac{\lambda_{\text{эфф}}}{\lambda_m} = \frac{1 + 2\phi \frac{1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_a}}{2 \frac{\lambda_m}{\lambda_a} + 1}}{1 - \phi \frac{1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_a}}{2 \frac{\lambda_m}{\lambda_a} + 1}}. \quad (2.21)$$

В диссертации определение эффективной теплопроводности пористой среды основано на определении коэффициентов переноса из результатов численного решения задачи в ANSYS.

Исходная геометрия для задачи теплопроводности в пористой среде с шарообразными порами представлена на рисунке 2.26. В соответствии с RVE методом минимальным репрезентативным объемом в рассматриваемой геометрии является кубическая ячейка (рис. 2.26 (а)) с длиной ребра a , в центре которой располагается шарообразная полость диаметром d_n .

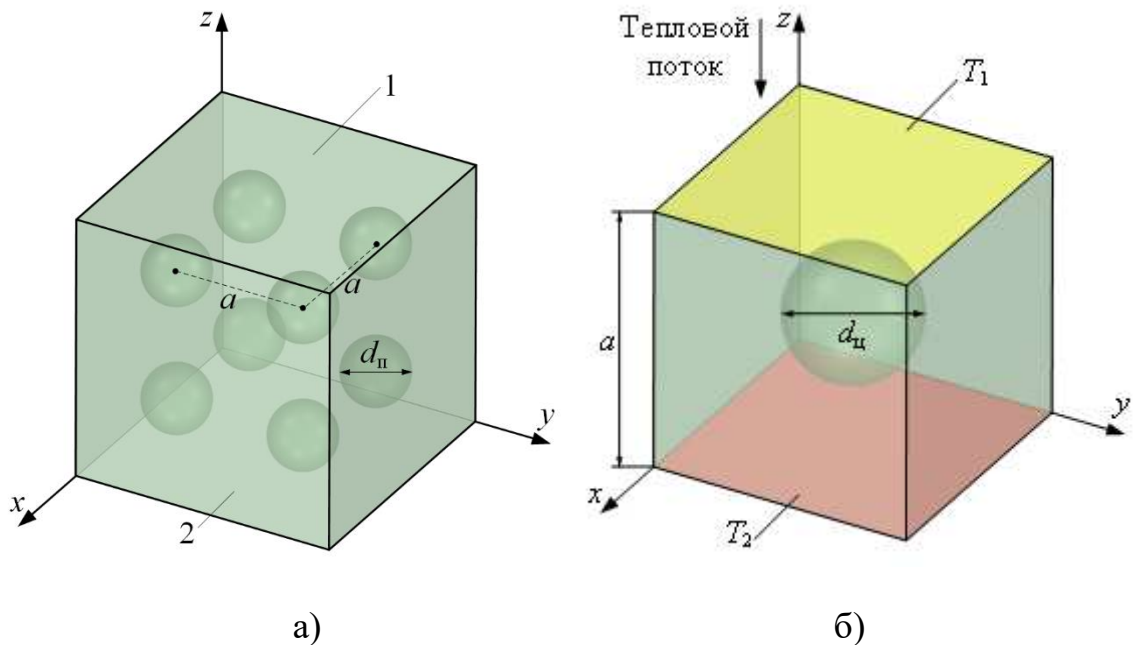


Рисунок 2.26. Исходная геометрия: а) пористый материал; б) элементарный объем

На отмеченных гранях куба (рис. 2.26 (а)) задаются граничные условия первого рода T_1 и T_2 соответственно. В соответствии с законом Фурье эффективная теплопроводность элементарного объема определяется как

$$\lambda_{эфф} = \frac{\overline{q_z a}}{(T_1 - T_2)}, \quad (2.22)$$

где $\overline{q_z}$ – плотность теплового потока, измеряемая на гранях куба, где задаются граничные условия.

Решение задачи теплопроводности в элементарном объеме и определение теплового потока $\overline{q_z}$ осуществляется методом конечных элементов в модуле Steady-State Thermal программного комплекса ANSYS. Свойства исходных материалов, из которых выполнена пористая среда, представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5. Теплофизические свойства материалов

Материал	Теплопроводность	Теплоемкость	Плотность
Пластик PETG	0,2 Вт/(м°С)	1050 Дж/(кг·°С)	1300 кг/м ³
Пластик ABS	0,15 Вт/(м°С)	1800 Дж/(кг·°С)	1040 кг/м ³
Пластик PLA	0,12 Вт/(м°С)	1600 Дж/(кг·°С)	1250 кг/м ³

При численном решении задачи теплопроводности был принят ряд допущений:

1. Не учитывается теплообмен конвекцией и излучением внутри пор;
2. Теплопроводностью воздуха внутри пор не учитывается;
3. Считается что теплообмен происходит исключительно в направлении оси z .

Конечно-элементная сетка для численного решения поставленной задачи в ANSYS представлена на рисунке 2.27. Для более точного определения значения теплового потока $\overline{q_z}$ размер элементов сетки на гранях куба, где задаются граничные условия, в несколько раз меньше основного размера.

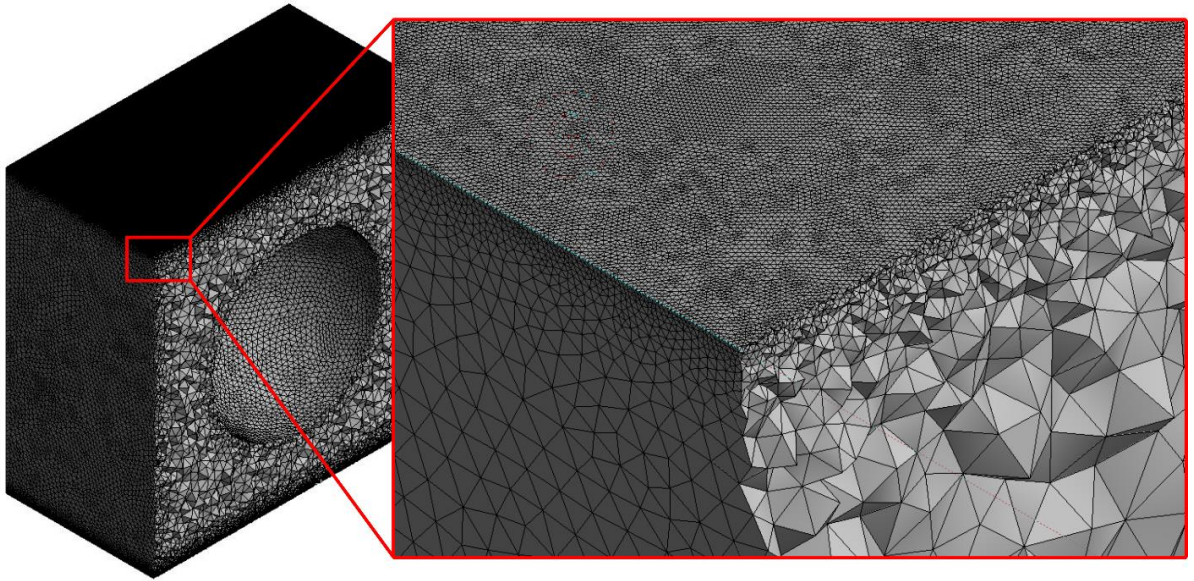


Рисунок 2.27. Конечно-элементная сетка

В результате численного решения были получены значения коэффициента эффективной теплопроводности $\lambda_{эфф}$ материала с шарообразными порами при различных геометрических параметрах элементарного объема (a, d_p). Зависимость эффективной теплопроводности от диаметра поры при различных размерах куба представлена на рисунке 2.28, где $d_{отн} = d_p / a$ – относительные диаметр.

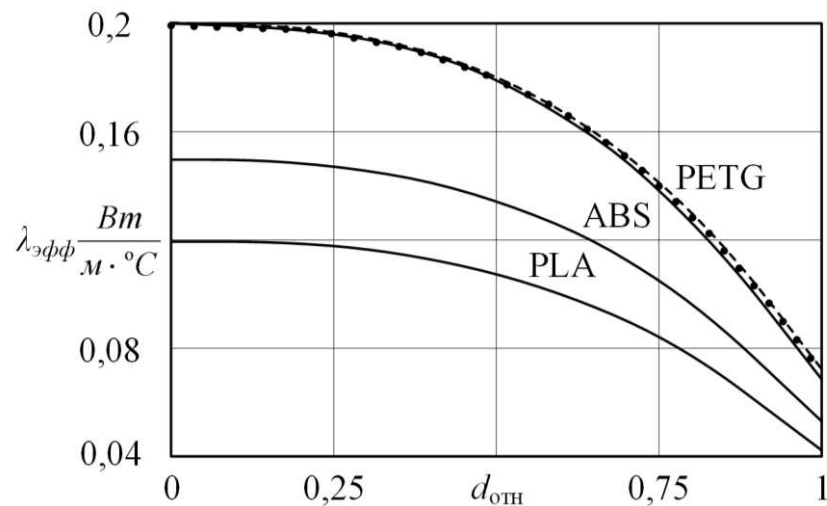


Рисунок 2.28. График зависимости эффективной теплопроводности от относительного диаметра: — МКЭ; - - - формула 2.21; •••• формула 2.20.

Из анализа графика можно заключить, что значения коэффициента эффективной теплопроводности, полученные при помощи разработанного

численно-аналитического метода, отличаются от значений, полученных методами Русселя и Эйкена, менее чем на 2%. Данные с графика были аппроксимированы аналитической зависимостью, с помощью которой можно определить эффективную теплопроводность материала при заданных геометрических параметрах

$$\lambda_{эфф} = \frac{\lambda_m}{1 + 0,0065e^{5,6d_{отн}}}. \quad (2.23)$$

2.3. Математическое моделирование теплопроводности в пористых ТПМП-материалах на основе модифицированного уравнения

В данном разделе диссертации представлена разработанная модифицированная модель теплопроводности в пористых материалах с упорядоченной макроструктурой, учитывающая пористость и геометрические параметры трижды периодических минимальных поверхностей. Модифицированное уравнение теплопроводности получено на основе зависимостей, описанных в п. 2.2.1 и п. 2.2.2, и имеет следующий вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{\lambda_{эфф}(\phi)}{c_e \rho_{эфф}(\phi)} \right] \nabla^2 T,$$

где ϕ – пористость; $\lambda_{эфф}(\phi)$ – эффективная теплопроводность; $\rho_{эфф}(\phi) = \rho(1 - \phi)$ – эффективная плотность; ρ – плотность исходного материала.

Для решения задач теплопроводности в пористых материалах в диссертации применяются приближенный аналитический и численно-аналитический методы. В частности, в п. 2.3.1 описан метод решения краевой задачи теплопроводности в бесконечно протяженной пористой пластине, основанный на совместном применении метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок, а также метода коллокаций.

В п. 2.3.2 изложен метод решения краевой задачи теплопроводности в бесконечно протяженной пористой пластине с постоянными во времени

внутренними источниками теплоты, основанный на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса.

2.3.1. Теплопроводность в пористой бесконечно протяженной пластине при граничных условиях третьего рода

Проектирование современного теплотехнического оборудования, тепловой защиты зданий и сооружений невозможно без корректного описания процессов переноса тепла в них. Особый интерес представляют процессы переноса, протекающие в пористых материалах (композитах, пенах др.), широко распространенных в космическом и авиационном машиностроении, энергетике, медицине и т.д.

В диссертации рассматривается задача теплопроводности в пористой бесконечно протяженной ТППП-пластине при граничных условиях третьего рода. Для решения данной задачи применяется метод вычисления высокоточных приближенных аналитических решений для нестационарных задач теплопроводности в пористых материалах. Этот подход объединяет применение метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок, а также включает в себя прямое удовлетворение дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля в заданном наборе точек пространственной переменной.

Применение метода ограничено только возможностью разделения переменных в исходном дифференциальном уравнении. Однако на форму дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля, которое формируется после разделения переменных, практически нет ограничений. Это делает метод применимым к задачам, для которых невозможно получить решения с использованием традиционных точных аналитических методов.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{\lambda_{\phi\phi}(\phi)}{c_e \rho_{\phi\phi}(\phi)} \right] \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (t > 0; \quad 0 < x < l); \quad (2.24)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (2.26)$$

$$\lambda_{\text{эфф}} \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} + \alpha(T_{\text{ср}} - T(l, t)) = 0, \quad (2.27)$$

где T – температура; x – координата; t – время; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ср}}$ – температура среды; l – половина толщины пластины; $\lambda_{\text{эфф}}(\phi)$ – теплопроводность пористого ТПП-материала; $\rho_{\text{эфф}}(\phi) = \rho_m(1 - \phi)$ – плотность пористого материала; ρ_m – плотность исходного материала; c – удельная теплоемкость.

Запишем задачу (2.24) – (2.27) в безразмерном виде

$$\left[\frac{\lambda_m(1 - \phi)}{\lambda_{\text{эфф}}} \right] \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (2.28)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (2.29)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0; \quad (2.30)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} + \text{Bi} \Theta(1, \text{Fo}) = 0, \quad (2.31)$$

где $\Theta = (T - T_{\text{ср}})/(T_0 - T_{\text{ср}})$ – безразмерная температура; $\xi = x/\delta$ – безразмерная координата; $\text{Fo} = (a_m t)/\delta^2$ – критерий Фурье (безразмерное время); $a_m = \lambda_m / c\rho_m$ – коэффициент температуропроводности исходного материала; λ_m – теплопроводности исходного материала; $\text{Bi} = \alpha\delta / \lambda_{\text{эфф}}$ – число Био.

В соответствии с методом разделения переменных решения задачи (2.28) – (2.31) будет иметь следующий вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \gamma(\text{Fo})\psi(\xi). \quad (2.32)$$

Подставив (2.32) в (2.28), разделим исходное уравнение на два уравнения, одно из которых включает только пространственные переменные, а другое – временные

$$d\gamma(\text{Fo})/d\text{Fo} + \nu\gamma(\text{Fo}) = 0; \quad (2.33)$$

$$d^2\psi(\xi)/d\xi^2 + H\nu\psi(\xi) = 0, \quad (2.34)$$

где ν – некоторая константа, $H = \lambda_m(1 - \phi) / \lambda_{\phi\phi} = 1/k_1$ учитывая (2.11).

Решение уравнения (2.33) известно и имеет вид

$$\gamma(\text{Fo}) = A \exp(-\nu\text{Fo}), \quad (2.35)$$

где A – неизвестный коэффициент.

Подставляя (2.32) в (2.30), (2.31) получаем

$$\left. \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0; \quad (2.36)$$

$$\left. \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi} \right|_{\xi=1} + \text{Bi} \cdot \psi(1) = 0. \quad (2.37)$$

Решения краевой задачи Штурма-Лиувилля (2.34), (2.36), (2.37) в соответствии с методом принимается в виде

$$\psi(\xi) = B_0 + \sum_{i=1}^r B_i \xi^{i+1}, \quad (2.38)$$

где $B_i (i = \overline{1, r})$ – неизвестные коэффициенты. Отметим, что соотношение (2.38) удовлетворяет граничному условию (2.36).

Соотношение (2.36) позволяет ввести еще одно граничное условие

$$\psi(0) = \text{const} = 1. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.38) в (2.39), находим $B_0 = 1$. Потребуем чтобы соотношение (2.38) удовлетворяло граничному условию (2.37) и уравнению (2.34) в точках $\xi = 1/5; 2/5; 3/5; 4/5$. Подставляя (2.38), ограничиваясь пятью членами ряда, в соотношение (2.37) и уравнение (2.34), применительно к точкам $\xi = 1/5; 2/5; 3/5; 4/5$ относительно неизвестных коэффициентов

$B_i (i = \overline{1, 5})$ получаем систему из пяти алгебраических линейных уравнений.

Тогда из решения этой системы при $B_i = 1$ находим коэффициенты $B_i (i = \overline{1, 5})$.

Найдем интеграл взвешенной невязки уравнения (2.34)

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(1 + \sum_{i=1}^r B_i \xi^{i+1} \right) + H v \left(1 + \sum_{i=1}^r B_i \xi^{i+1} \right) \right] d\xi = 0. \quad (2.40)$$

Вычисляя интегралы в (2.40), с учетом найденных значений коэффициентов $B_i (i = \overline{1, 5})$ относительно собственных чисел $v_k (H)$ получаем алгебраическое уравнение пятой степени

$$v^5 H^5 - 747 v^4 H^4 + 105360 v^3 H^3 - 4044240 v^2 H^2 + 36028800 v H - 24494400 = 0 \quad (2.41)$$

Из решения уравнения (2.41) при $H = 1,3245$ получаем пять собственных чисел $v_1 = 434,968444$; $v_2 = 87,468817$; $v_3 = 32,216312$; $v_4 = 8,772727$; $v_5 = 0,558831$.

Подставляя (2.35), (2.38) в (2.32), относительно каждого собственного числа будем иметь частные решения вида

$$\Theta_k(\xi, Fo) = A_k \exp(-v_k(H)Fo) \left(1 + \sum_{i=1}^r B_i(v_k) \xi^{i+1} \right). \quad (2.42)$$

Каждое частное решение (2.42) точно удовлетворяет граничным условиям (2.30), (2.31) и приближенно (в четвертом приближении) – уравнению (2.28). Однако ни одно из них, в том числе и их сумма

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^n \left[A_k \exp(-v_k(H)Fo) \left(1 + \sum_{i=1}^r B_i(v_k) \xi^{i+1} \right) \right], \quad (2.43)$$

не удовлетворяют начальному условию (2.29). Для выполнения начального условия составляется его невязка и требуется ортогональность невязки к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^5 \left[A_k \sum_{i=1}^r \left[1 + B_i(v_k) \xi^{k+1} \right] \right] - 1 \right\} \psi_j(v_j, \xi) d\xi = 0. \quad (j = 1, 2, 3; r = 5) \quad (2.44)$$

Вычисляя интегралы в (2.44), для нахождения $A_k (k = \overline{1, 5})$ получаем систему из пяти алгебраических линейных уравнений. Ее решение

$$A_1 = 0,010142; \quad A_2 = -0,042089; \quad A_3 = 0,054192;$$

$$A_4 = -0,137528; \quad A_5 = 1,120143.$$

Результаты расчетов по формуле (2.43) в четвертом приближении предствалены на рис. 2.29 и 2.30. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне чисел $0,01 \leq Fo < \infty$ отличие полученного решения от точного не превышает 1% (по норме Чебышева).

Для повышения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (2.38). Для получения дополнительных уравнений с целью определения неизвестных коэффициентов B_i будем увеличивать число точек по координате ξ , в которых следует выполнять уравнение (2.34). И, в частности, принимая число таких точек, равным 8 (с шагом $\Delta\xi = 1/9$, начиная с точки $\xi = 1/9$), относительно неизвестных коэффициентов B_i получаем 9 уравнений (еще одно уравнение добавляется в результате выполнения граничного условия (2.39)). После определения из решения этой системы уравнений неизвестных $B_i (i = \overline{1, 9})$ дальнейший ход решения повторяется. На рисунках 2.29 и 2.30 представлены результаты расчетов для восьмого приближения.

Отметим, что ввиду плохой обусловленности матрицы коэффициентов системы алгебраических линейных уравнений, являющейся заполненной квадратной матрицей с большим разбросом коэффициентов по абсолютной величине, её решение для получения как можно большей точности выполнялось методом итераций.

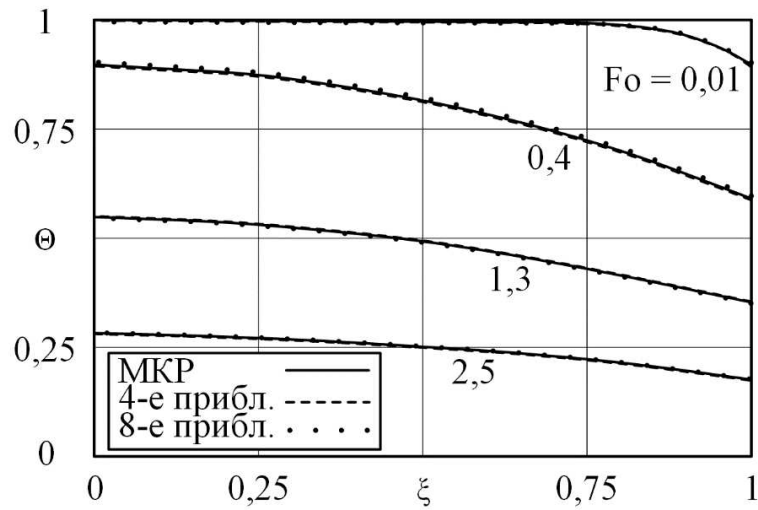


Рисунок 2.29. Распределение температуры по координате при $Bi = 1$

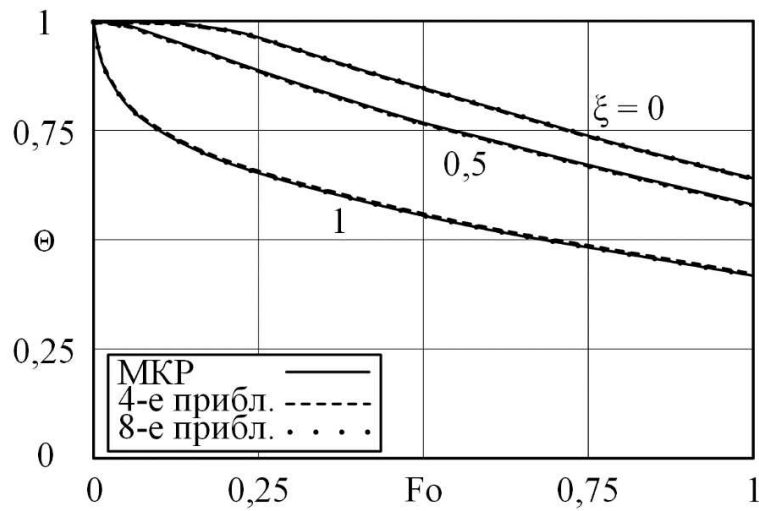


Рисунок 2.30. Изменение температуры во времени при $Bi = 1$

На рис. 2.31 представлена невязка дифференциального уравнения (2.28), из анализа которой можно сделать вывод о сходимости используемого метода.

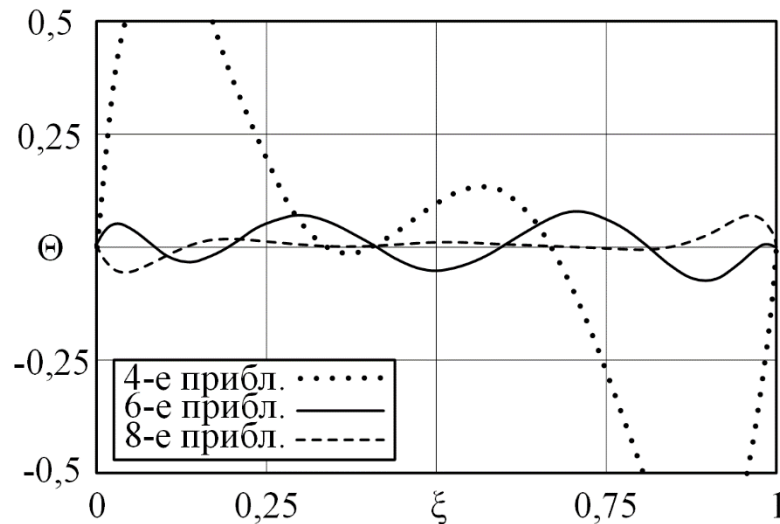


Рисунок 2.31. Невязка дифференциального уравнения

Получение высокоточных значений собственных чисел оказалось возможным благодаря реализации в ходе решения точного выполнения дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля в количестве точек пространственной переменной, равном числу определяемых собственных чисел.

Возвращаясь к размерным величинам построим графика плотности теплового потока по толщине пористой пластины (см. рис. 2.32) со структурой ТПМП Шварца Р, изготовленной из пластика PETG, при $T_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{\text{ср}} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ и $\alpha = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ }^\circ\text{C})$.

При уменьшении пористости значительно возрастают значение плотности теплового потока по всей толщине пластины. Однако, температурные профили при различных значениях пористости остаются неизменными. Это свидетельствует о том, что значение коэффициента эффективной температуропроводности остается постоянным при изменении пористости. Соответственно при охлаждении пластины с пористостью $\phi = 0.5$ до той же температуры, что и пластины с $\phi = 0.8$, в окружающую среду выделяется в несколько раз больше теплоты.

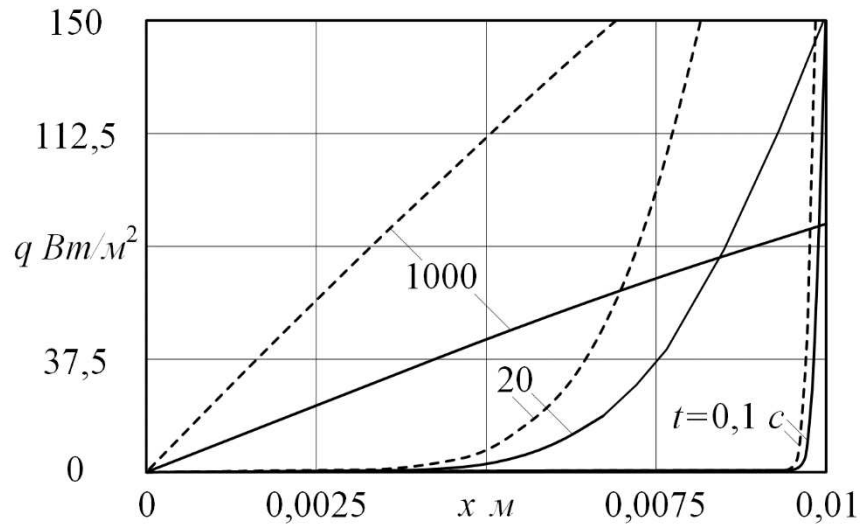


Рисунок 2.32. Плотность теплового потока по толщине пластины:

----- $\phi = 0.5$; ——— $\phi = 0.8$

2.3.2. Теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине с внутренними источниками теплоты

Важной задачей является исследование процесса теплопроводности в пористых телах при наличии внутренних источников теплоты, которые могут возникать вследствие протекания химических реакций, электрических токов и ряда других факторов. Наличие внутренних источников теплоты может привести как к неограниченному возрастанию температуры (тепловому взрыву), так и к состоянию теплового равновесия. Поэтому для анализа поведения системы необходимо иметь точное аналитическое или как минимум приближенное решение соответствующей краевой задачи.

В диссертации для получения приближенного аналитического решения задачи теплопроводности в пористой бесконечно протяженной ТПМП-пластине с внутренними источниками тепла применялся метод, основанный на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса [92,93,94,95].

Рассмотрим краевую задачу теплопроводности в плоской бесконечно протяженной пористой пластине с постоянными во времени внутренними источниками теплоты в следующей постановке:

$$\left[\frac{\lambda_m(1-\phi)}{\lambda_{\text{эфф}}} \right] \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \text{Po} \quad (\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (2.45)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (2.46)$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = 1; \quad (2.47)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (2.48)$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$ – безразмерная температура; $\xi = x/\delta$ – безразмерная координата; $\text{Fo} = a_m t/\delta^2$ – безразмерное время; $\text{Po} = \omega \delta^2 / [\lambda_{\text{эфф}}(T_{\text{ст}} - T_0)]$ – критерий Померанцева (интенсивность внутренних источников теплоты; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки.

Введем в рассмотрение новую функцию вида

$$\varphi_0(\text{Fo}) = \frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = \text{tg} \alpha \quad -\infty < \varphi_0(\text{Fo}) < \infty, \quad (2.49)$$

где α – угол наклона между касательной к графику функции $\Theta(\xi, \text{Fo})$ в точке $\xi = 0$ и координатной осью.

Возвращаясь к размерным величинам, выражение (2.49) может быть записано в виде

$$\varphi_0(t) = \frac{\delta}{T_{\text{ст}} - T_0} \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}. \quad (2.50)$$

На поверхности пластины плотность теплового потока по закону Фурье определяется выражением

$$q(t) = -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}. \quad (2.51)$$

С учетом (2.51) соотношение (2.50) примет вид

$$\varphi_0(t) = \frac{\delta}{\lambda(T_0 - T_{\text{ст}})} q(t) = Mq(t), \quad (2.52)$$

где $M = \text{const}$ – некоторый коэффициент, который определяется масштабом систем.

Таким образом, новая искомая функция представляет собой плотность теплового потока в точке приложения граничного условия первого рода в произведении с константой.

Решение задачи (2.45) – (2.48) отыскивается в виде ряда

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{i=1}^n b_i(Fo) \xi^{i-1}, \quad (2.53)$$

где $n \in N$ – натуральное число, соответствующее количеству членов ряда (2.53); $b_i(Fo)$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерного времени.

Для получения решения задачи (2.45) – (2.48) в первом приближении ограничимся тремя слагаемыми ($n=3$) в выражении (2.53). Чтобы определить неизвестные коэффициенты $b_i(Fo)$ подставим выражение (2.53) в (2.47) и (2.48), а также в новую искомую функцию (2.49). В результате получим

$$\begin{cases} b_1 = 1; \\ b_2 + 2b_3 = 0; \\ b_2 - \varphi_0(Fo) = 0. \end{cases}, \quad (2.54)$$

Решая систему уравнений (2.54) находим

$$b_1(Fo) = 1; \quad b_2(Fo) = \varphi_0(Fo); \quad b_3(Fo) = -\frac{\varphi_0(Fo)}{2}. \quad (2.55)$$

Выражение (2.53) с учетом найденных коэффициентов примет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = f_1(\xi) \varphi_0(Fo) + 1, \quad (2.56)$$

где $f_1(\xi) = \xi(1 - 0,5\xi)$ – координатная функция.

Для приближенного удовлетворения исходного дифференциального уравнения (2.45) составим интеграл теплового баланса, вычислив который получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$H \frac{d\varphi_0(Fo)}{dFo} + 3\varphi_0(Fo) - 3Po = 0. \quad (2.57)$$

Решив уравнение (2.57) получим

$$\varphi_0(Fo) = C_1 e^{-3Fo/H} + Po. \quad (2.58)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Подставляя (2.58) в (2.56), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = f_1(\xi)(C_1 e^{-3Fo/H} + Po) + 1. \quad (2.59)$$

Для выполнения начального условия (2.46) составим его невязку и потребуем ортогональности невязки к координатной функции $f_1(\xi)$

$$\int_0^1 [\Theta(\xi, 0)] f_1(\xi) d\xi = 2C_1 + 5 + 2Po = 0. \quad (2.60)$$

Значение константы интегрирования $C_1 = -2,5 - Po$ определяется из решения уравнения (2.60). Подставляя найденное значение константы интегрирования в (2.59) получим решение задачи (2.45) – (2.48) в первом приближении

$$\Theta(\xi, Fo) = ((-2,5 - Po)e^{-3Fo/H} + Po)\xi(1 - 0,5\xi) + 1. \quad (2.61)$$

Стоит отметить, что для решения в первом приближении достаточным является наличие граничных условий в (2.47) – (2.49). Однако, для увеличения числа приближений требуется введение дополнительных граничных характеристик, физический смысл которых состоит в выполнении уравнения (2.45) и от него по координате на границах исследуемой области. Получение дополнительных граничных характеристик возможно из следующих формулы, представленных в общем виде

$$\left. \frac{\partial^i \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^i} \right|_{\xi=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^{i-1} \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^{i-1}} \right|_{\xi=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^i \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^i} \right|_{\xi=1} = 0,$$

где i – номер приближения.

На рисунках 2.33, 2.34 представлены результаты решения задачи предложенным методом в первом и четвертом приближениях в сравнении с численным решением при $H = 1,3245$.

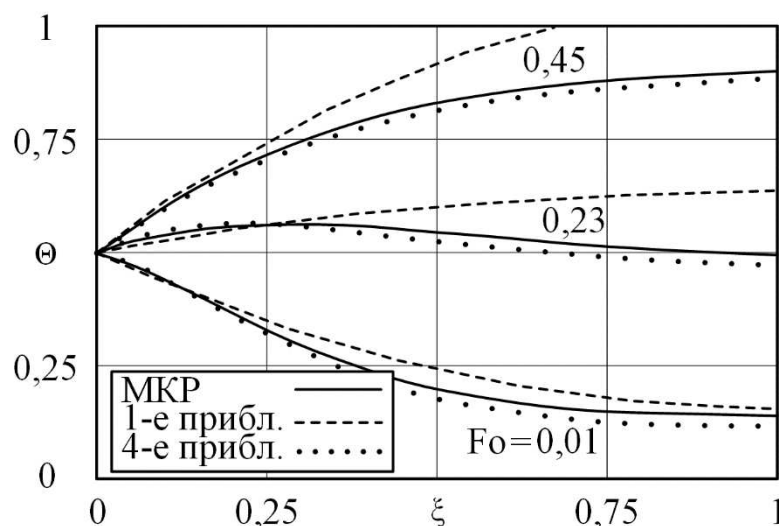


Рисунок 2.33. Изменение безразмерной температуры в пластине при $Po = 5$

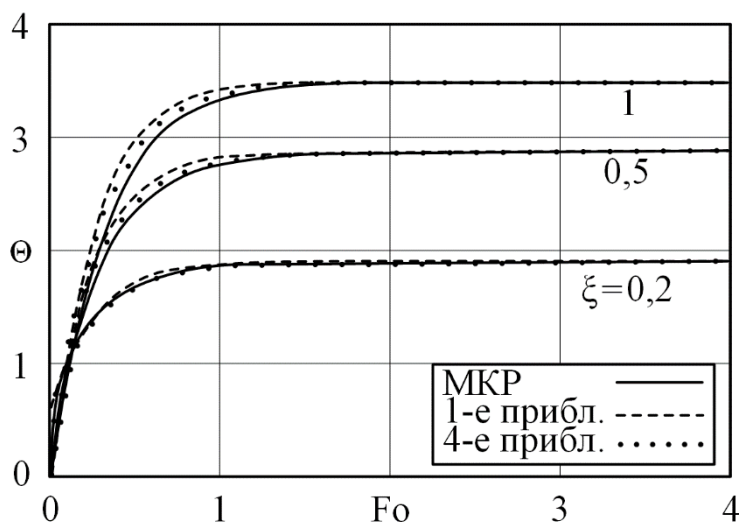


Рисунок 2.34. Изменение безразмерной температуры в пластине при $Po = 5$

Анализ рисунков позволяет заключить, что предложенный приближенный аналитический метод решение задачи теплопроводности в бесконечной пластине с постоянным во времени внутренним источником теплоты позволяет с достаточной точностью определять распределение температуры уже в первом приближении (погрешность менее 5% по норме Чебышева).

Возвращаясь к размерным единицам построим графика плотности теплового потока по толщине пористой пластины (см. рис. 2.35) со структурой

ТПМП Шварца Р, изготовленной из пластика PETG, при $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{\text{ст}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
и $\omega = 0,1 \text{ Вт}$.

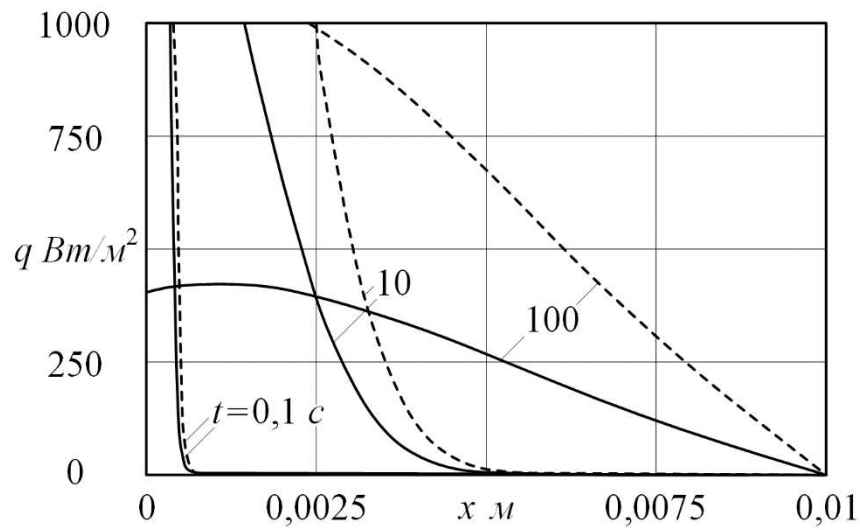


Рисунок 2.35. Плотность теплового потока по толщине пластины:

----- $\phi = 0.5$; ——— $\phi = 0.8$

Из анализа графика на рис. 2.35 видно, что при уменьшении пористости наблюдается увеличение значений плотности теплового потока по всей толщине пластины.

3. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ГИДРОДИНАМИКИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В 3 главе представлен метод математического моделирования процесса фильтрации в пористых материалах с ТПМП структурой.

Построение геометрии для численного моделирования гидродинамики методом конечных элементов представлено в п.3.1. В п.3.2 представлена новая зависимость для определения проницаемости пористых ТПМП-материалов в зависимости от коэффициента пористости.

Решение краевой задачи фильтрационного течения в плоском бесконечно протяженном канале представлено в разделе 3.3.

В разделе 3.4. описано исследование тепломассопереноса в канале с квадратным сечением, в котором для интенсификации теплообмена применяются ребра в форме ТПМП Шварца Р. Решение данной задачи осуществляется методом конечных элементов в модуле Fluent программного комплекса ANSYS.

Прикладное применение ТПМП в теплообменном устройстве представлено в разделе 3.5.

3.1. Создание CAD-моделей пористых ТПМП-материалов для CFD-моделирования

В п. 2.1 диссертации описан процесс построения твердотельной модели ТПМП-материала для численного моделирования теплопроводности в ANSYS. Этапы подготовки геометрии для CFD моделирования частично повторяют алгоритм описанный в п. 2.1. Однако, существует принципиальная разница в построении геометрии для моделирования теплопроводности и гидродинамики, поскольку в первом случае исследуемые процессы происходят внутри стенок ТПМП-решетки, а во втором – исследуются потоки, обтекающие данную решетку (см. рис. 3.1). Кроме того, применение RVE концепции при решении задач теплопроводности позволяет свести расчет до

определения свойств одной элементарной ячейки, что является невозможным в задачах гидродинамики в пористых ТПМП-материалах. Поэтому при подготовке моделей для исследования теплопроводности предпочтение отдается качеству одной элементарной ячейки, в то время как при создании геометрии для CFD моделирования определяющую роль играет количество ячеек и их соединения.

Рассмотрим процесс построения геометрии на примере ТПМП Шварца Р. После создания облака точек в Surface Evolver и построения поверхности в SolidWorks выполняется дополнительная обработка поверхности в Blender для оптимизации и упрощения сетки. Таким образом получается сглаженная поверхность элементарной ячейки (см. рис. 3.1), позволяющая выполнить моделирование течения жидкости через пористую среду, состоящую из множества таких ячеек.

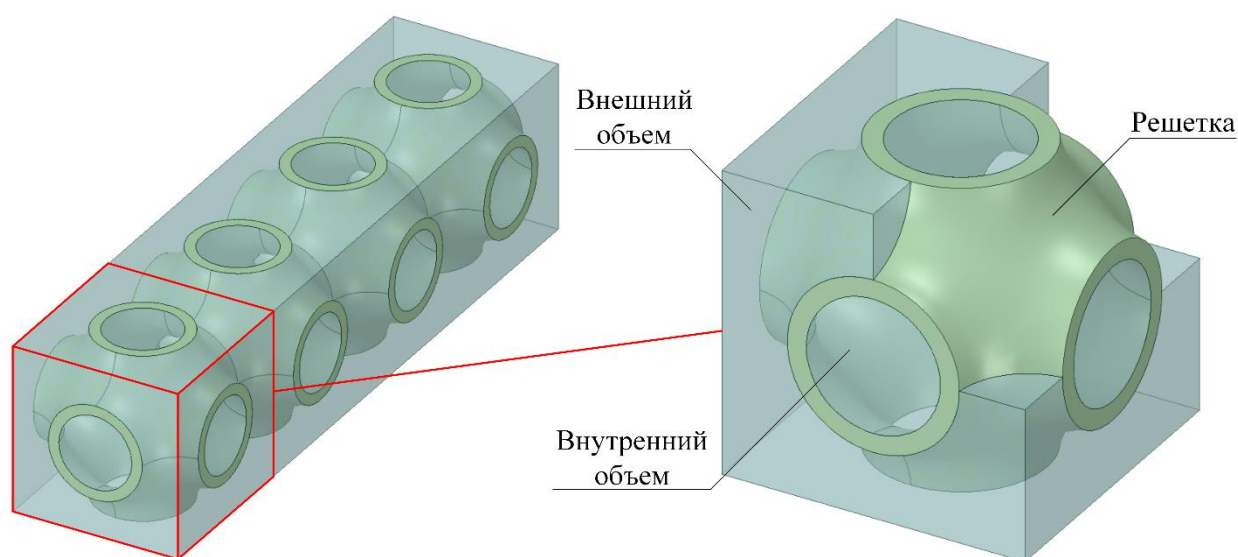


Рисунок 3.1. Геометрия

3.2. Метод определения проницаемости пористых ТПМП-материалов на основе интерпретации результатов CFD-моделирования

Исследование процессов взаимодействия смежных потоков жидкости представляет большой научный и прикладной интерес. Особый интерес представляет описание процессов переноса при течении жидкости в пористых средах (фильтрах, грунтах, катализаторах и др.). В диссертации разработан

метод определения коэффициентов проницаемости пористых материалов при фильтрационном течении на основе интерпритации результатов вычислительных экспериментов в ANSYS Fluent.

ТПМП-материалы состоят из повторяющихся элементарных ячеек. В п.2.1 диссертации описаны характерные геометрические параметры элементарных ячеек (a – длина ребра куба, δ – толщина стенки ячейки). Варьируя данными параметрами можно изменять свойства элементарной ячейки, а, следовательно, и свойства состоящего из них пористого материала.

Основным законом, описывающим течение жидкости в пористых средах, в том числе в ТПМП-материалах, является закон Дарси, устанавливающий линейную связь между скоростью фильтрации и градиентом напора

$$\nabla P = -\frac{k u}{\mu}, \quad (3.1)$$

где P – давление; k – коэффициент проницаемости; u – скорость; μ – динамическая вязкость.

Очевидно, что при использовании закона Дарси в рассмотрение вводится некая фиктивная скорость, имеющая постоянное значение во всей области фильтрационного течения. Таким образом, простейшая (линейная) модель фильтрации Дарси не допускает формирования вязкого пограничного слоя в течении, и не позволяет адекватно описать процессы переноса тепла и массы вблизи границы разделения сред. В этом случае может быть использована модель Бринкмана, позволяющая описать профиль скорости фильтрационного течения с учетом пограничного слоя. Согласно уравнению моментов Бринкмана

$$\nabla P = -\frac{k u}{\mu} + \tilde{\mu} \nabla^2 u, \quad (3.2)$$

где $\tilde{\mu}$ – эффективная вязкость.

Использование уравнения (3.2) позволяет, в частности, задать условия сопряжения при течении однородной жидкости у границы раздела с пористой

средой. В настоящей работе выполнено исследование влияния структурных характеристик пористой ТПМП-среды на ее проницаемость – определены зависимости коэффициента проницаемости от относительной толщины стенки элементарной ячейки при постоянной скорости фильтрации. Рассмотрим модель течения жидкости в плоском канале, заполненном пористым ТПМП-материалом (см. рис. 3.2).

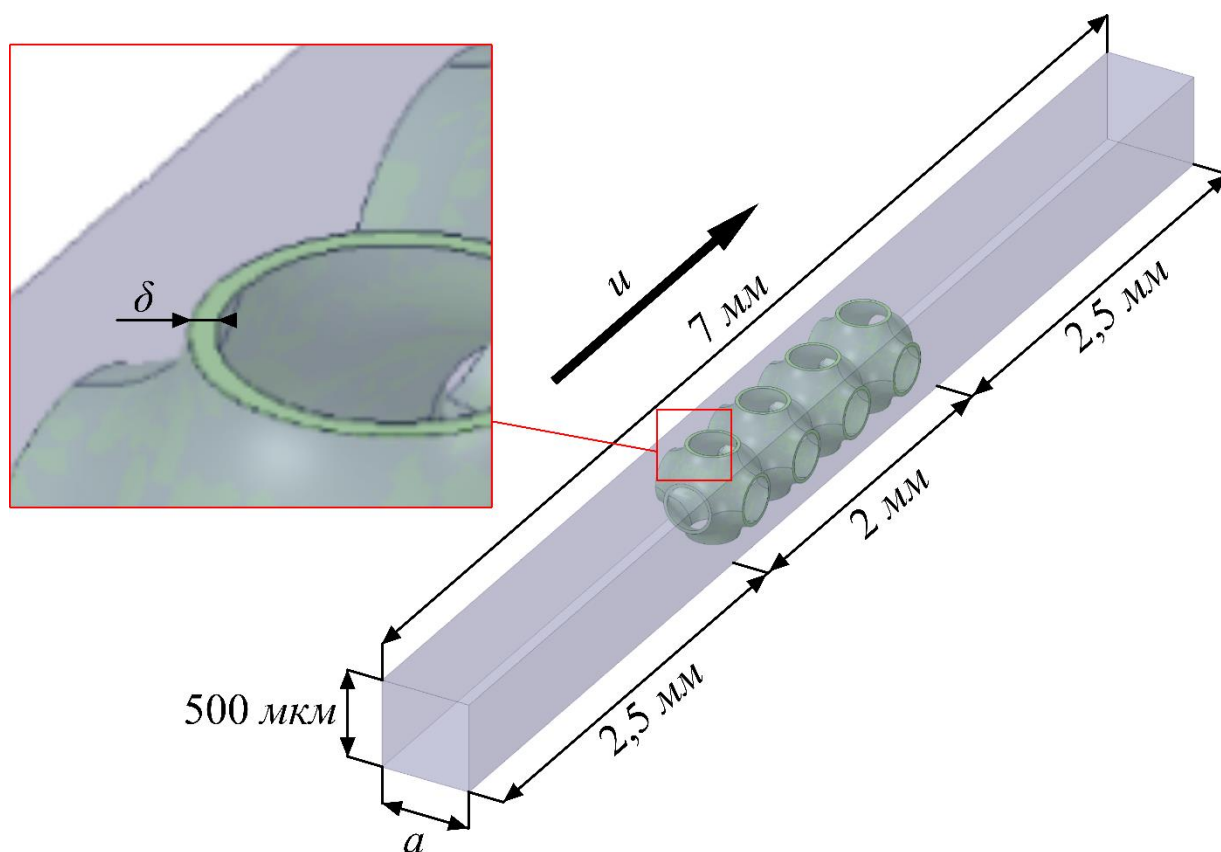


Рисунок 3.2. Модель фильтрационного течения

Согласно уравнению (3.2) для определения профиля скорости фильтрации помимо физических свойств жидкости необходимо знать свойства среды, в частности, проницаемость и эффективную вязкость. Строго говоря, эффективная вязкость описывает диффузию импульса с учетом пространственной структуры среды. То есть является одновременно как свойством как среды, так и фильтрующейся жидкости. В дальнейшем будем использовать известное соотношение между вязкостью и эффективной вязкостью, полученное Ochoa-Tapia и Whitaker

$$M = \frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\phi\tau}, \quad (3.3)$$

где ϕ – пористость; τ – коэффициент извилистости. Значение коэффициента извилистости для пористого ТПМП-материала на основе топологии Шварца Р приблизительно равно 1, что было определено в результате численного эксперимента.

Стоит отметить, что существуют различные подходы по определению эффективной вязкости. В работах Бринкмана отношение (3.3) принимается равным единице [30]. Однако, в действительности эффективная вязкость может значительно отличаться от динамической вязкости жидкости как в большую, так и в меньшую сторону в зависимости от свойств исследуемой среды. В исследованиях [58,45,75] эффективная вязкость определяется с использованием экспериментально-теоретических методов. Например, Martys и др. [58] в своем исследовании с помощью компьютерной модели определили значения эффективной вязкости в зависимости от пористости исследуемой среды. Givler and Altobelli [45] описали экспериментальный процесс определения эффективной вязкости при помощи установки, основанной на явлении ядерного магнитного резонанса. А Starov и Zhdanov [75] предложили дифференциальный метод определения эффективной вязкости, которой достаточно хорошо согласуется с результатами компьютерного моделирования.

Таким образом, для отыскания профиля скорости согласно уравнению (3.2) необходимо знать значение коэффициента проницаемости в зависимости от структурных параметров среды.

Скорость фильтрации согласно закону Бринкмана определяется соотношением

$$u(y) = \frac{k\nabla P}{\mu} \left[1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{\phi L^2}{k}} \frac{y}{L}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\phi L^2}{k}}\right)} \right], \quad (3.4)$$

где L – половина ширины канала. Однако, стоит отметить, что в отличие от закона Дарси (3.1) модель Бринкмана (3.4) определяет профиль скорости фильтрационного течения, а не среднюю скорость потока. В этом случае введем понятие средней скорости фильтрационного течения

$$u_{\text{cp}} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{k\nabla P}{\mu} \left[1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{\phi L^2}{k}} \frac{y}{L}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\phi L^2}{k}}\right)} \right] \right] dy. \quad (3.5)$$

Основным эмпирическим коэффициентом в данном выражении является коэффициент проницаемости k . Для его определения воспользуемся предложенной в диссертации численно-аналитической методикой по аналогии с задачами теплопроводности.

Рассмотрим задачу течения жидкости через канал, заполненный пористым ТПМП-материалом (см. рис. 3.2).

На рисунке 3.2 изображена геометрия для численного моделирования течения жидкости через пористый ТПМП-материал в ANSYS Fluent. Особенностью некоторых трижды периодических минимальных поверхностей, в том числе ТПМП Шварца Р, является идеальная кубическая симметрия. Таким образом, элементарная ячейка помещается в куб с длиной ребра a . Изображенная на рис. 3.2 пористая зона (длиной 2 мм при $a = 500$ мкм) формируется путем транслирования элементарной кубической ячейки вдоль оси, соответствующей направлению течения жидкости. Непосредственно перед и после пористой зоной расположены зоны стабилизации потока длиной 2,5 мм соответственно. Пористость ТПМП участка ϕ варьируется путем изменения толщины стенки δ . При этом

зависимость пористости от характерных геометрических параметров элементарной ячейки (a, δ) устанавливается в соответствии с выражением (2.15).

В таблице 3.1 представлены исходные данные для задачи течения жидкости в канале, заполненном пористым ТПМП-материалом. При решении задачи течения жидкости методом конечных элементов в ANSYS Fluent использовалась $k - \varepsilon$ модель турбулентности.

Таблица 3.1. Исходные данные

	Значение	Единица измерения
Начальная средняя скорость потока, u	0,005	$м/с$
Динамическая вязкость, μ	0,001003	$кг/м-с$
Плотность, ρ	998,2	$кг/м^3$
Длина ребра куба, a	500	$мкм$
Толщина стенки ячейки, δ	0,015 ... 0,15	$мм$

В результате численных экспериментов в ANSYS определена зависимость потерь давления от относительной толщины φ и пористости ϕ исследуемого ТПМП-материала при начальной скорости потока $0,005 м/с$ (см. рис. 3.3 и табл. 3.2).

Используя результаты вычислительного эксперимента (см. рис. 3.3 и табл. 3.2) в программном комплексе ANSYS варьируя значением пористости среды, подставляя при этом в (3.5) значения потерь давления, получим зависимость проницаемости от пористости при средней скорости фильтрации $0,005 м/с$

$$k = 4,838 \cdot 10^{-11} \exp(2,957\phi) - 6,351 \cdot 10^{-11}. \quad (3.6)$$

Построим график зависимости проницаемости от пористости (см. рис. 3.4).

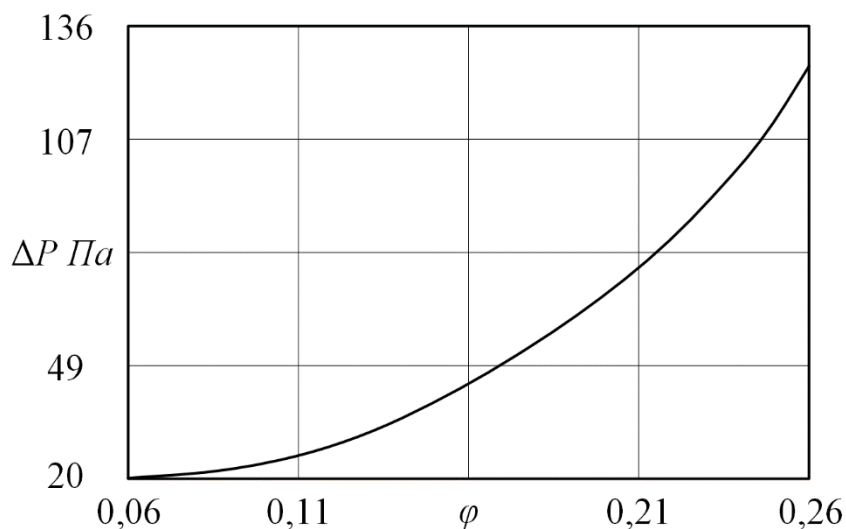


Рисунок 3.3. График зависимости потерь давления от относительной толщины при $u = 0,005 \text{ м/с}$

Таблица 3.2. Результаты численного решения

ϕ	0,92	0,68	0,49	0,38
ΔP	16,79 Па	33,6 Па	97,77 Па	157,1 Па

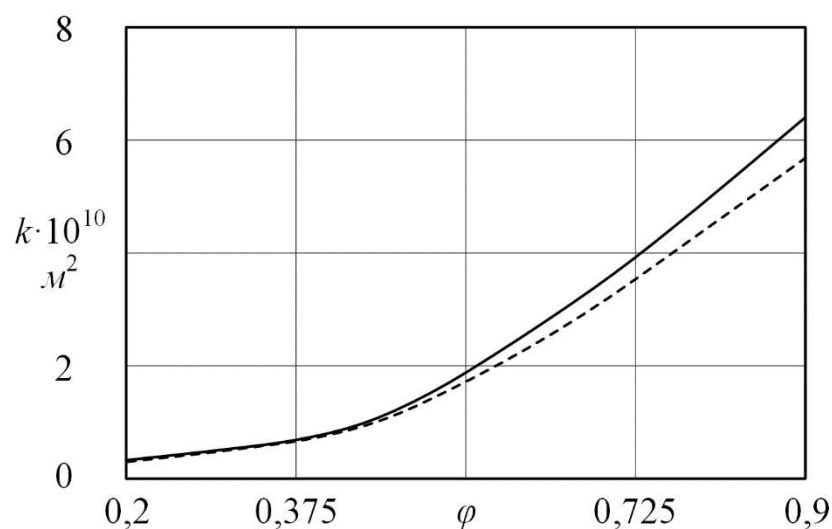


Рисунок 3.4. Графики зависимости проницаемости от пористости при $u = 0,005 \text{ м/с}$: — модель Бринкмана; - - - модель Дарси.

На графике на рис. 3.4 для сравнения также нанесена зависимость проницаемости от пористости в соответствии с моделью Дарси. Из анализа

графика можно судить о соответствии данных моделей при заданной скорости в исследуемом диапазоне ϕ . Однако, существует некоторое расхождение, которое достигает 8% (по норме Чебышева) при пористости 0.9.

3.3. Исследование фильтрационного течения жидкости в пористой среде

Одними из наиболее сложных и фундаментальных задач математической физики являются задачи, связанные с течением жидкости в пористых средах. Понимание гидродинамических процессов, происходящих при фильтрационном течении жидкости, играет важную роль в гидрогеологии, нефтегазовой промышленности и в других сферах, связанных с подземной гидромеханикой.

В данном разделе диссертации представлено решение задачи фильтрационного течения жидкости через пористую ТПМП-среду, основанную на топологии трижды периодической минимальной поверхности Шварца Р.

Скорость жидкости в пористой среде определяется разными моделями фильтрационного течения, в том числе:

$$1) \text{ моделью Дарси } \nabla P = -\mu k^{-1} u; \quad (3.7)$$

$$2) \text{ моделью Бринкмана } \nabla P = -\mu k^{-1} u + \tilde{\mu} \nabla^2 u; \quad (3.8)$$

$$3) \text{ моделью Форхгеймера } \nabla P = -\mu k^{-1} u - c_f k^{-1/2} \rho_f |u| u, \quad (3.9)$$

где k – проницаемость; μ – вязкость жидкости; u – скорость; ρ_f – плотность жидкости; c_f – сопротивление формы; $\tilde{\mu}$ – эффективная вязкость, равная

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\phi \tau}, \quad (3.10)$$

где ϕ – пористость; τ – коэффициент извилистости, который равен 1 для ТПМП Шварца Р.

Рассмотрим задачу течения жидкости в плоском пористом канале (см. рис. 3.5), заполненном ТПМП ячейками Шварца Р, определяя при этом профиль скорости в соответствии с моделью Бринкмана (3.8).

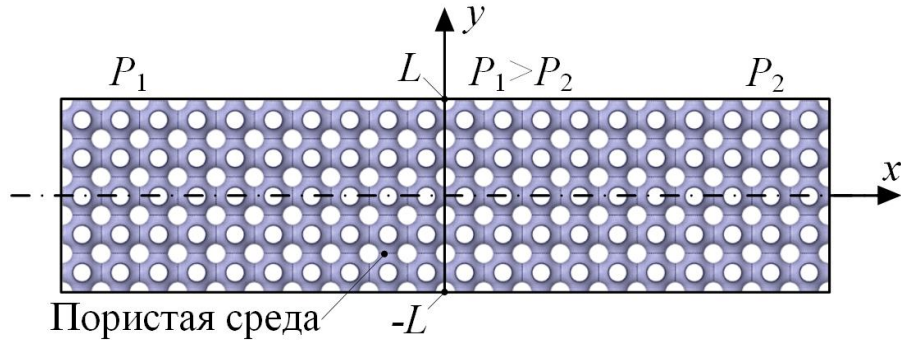


Рисунок 3.5. Схема задачи

Уравнению (3.8) в одномерном случае примет вид

$$\tilde{\mu} \frac{d^2 u(y)}{dy^2} - \frac{\mu}{k} u(y) - \nabla P = 0. \quad (3.11)$$

Учитывая, что $P_1 > P_2 \Rightarrow \nabla P < 0$; $\left(\frac{P_2 - P_1}{\Delta x}\right) < 0$, (3.11) будет

$$\tilde{\mu} \frac{d^2 u(y)}{dy^2} - \frac{\mu}{k} u(y) + \nabla P = 0 \quad (0 < y < L), \quad (3.12)$$

где ∇P – перепад давления по длине канала (градиент).

Граничные условия для (3.12) имеют вид

$$u(L) = 0; \quad \left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (3.13)$$

Общий интеграл задачи (3.12) – (3.13) имеет вид

$$u(y) = \frac{k \nabla P}{\mu} \left[1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{\phi L^2}{k}} \frac{y}{L}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\phi L^2}{k}}\right)} \right]. \quad (3.14)$$

На рис. 3.6. изображен профиль скорости в плоском пористом канале в соответствии с (3.14). Из анализа графика можно заключить, что скорость имеет постоянное значения в середине канала, однако вблизи стенок наблюдается резкое снижение скорости потока.

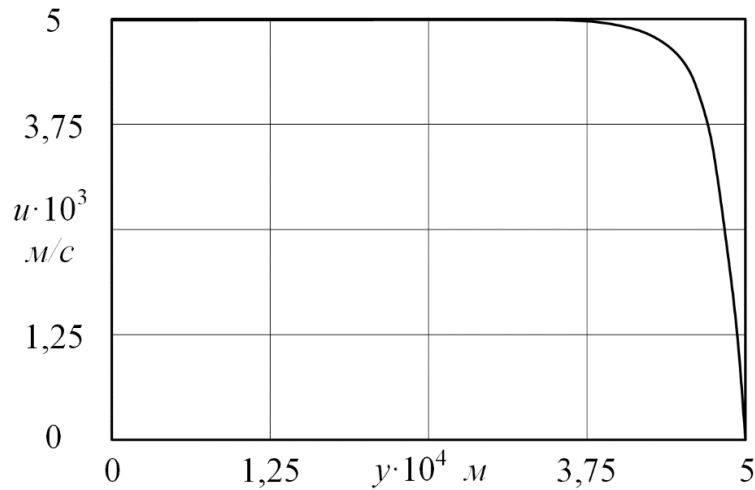


Рисунок 3.6. Распределение скорости по ширине канала при $\phi = 0,68$ и $\nabla P = 16799,3$ Па/м

Выражение (3.14) определяет профиль скорости течения в пористой среде в соответствии с моделью течения Бринкмана. Изменение температуры жидкости по длине канала может быть определено из решения уравнения энергии

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi, \quad (3.15)$$

где Φ – диссипация энергии. Для модели Бринкмана

$$\Phi = \frac{\mu u^2}{k} - \mu u \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (3.16)$$

3.4. Исследование тепломассопереноса в канале с ТПМП-оребрением

Во многих отраслях промышленности широко используются различного рода теплообменные устройства. В связи с этим активно ведется разработка новых видов регенеративных и рекуперативных систем, в частности, микро- и наноканальных теплообменников, каталитических систем с пористыми вставками, теплонасосных рекуператоров и др. Для интенсификации теплообмена и повышения КПД вышеперечисленных устройств применяется множество методов, к которым относятся оребрение поверхностей, турбулизация поток и т.д. Создание дополнительного перемешивания потоков

и увеличение коэффициента теплопередачи обычно осуществляется за счет продольных или поперечных ребер, расположенных на теплообменных поверхностях. Однако, увлечение эффективности теплообмена также возможно путем применения ТПМП-решеток в тракте теплообменника, которые одновременно турбулизируют поток жидкости и увеличивают площадь теплообмена.

Важной задачей является изучение тепломассопереноса в теплообменных устройствах [89,96]. Построение контуров распределения температуры и скорости, а также определение характерных конструктивных параметров является необходимым при проектировании теплообменников [99,103,104]. Для этого применяются различные аналитические и численные методы. Однако, применение классических аналитических методов при решении задачи тепломассопереноса в канале со сложной геометрией является невозможным, либо возможным с рядом определенных допущений и усреднений, что значительно снижает точность результатов. В связи с этим в диссертации предложена методика расчёта теплообменного устройства с ТПМП-ребрением на основе вычислительного эксперимента в ANSYS Fluent.

Рассмотрим задачу тепломассопереноса в канале с квадратным сечением, в котором для интенсификации теплообмена применяются ребра в форме ТПМП Шварца Р. Схема задачи изображена на рис. 3.7.

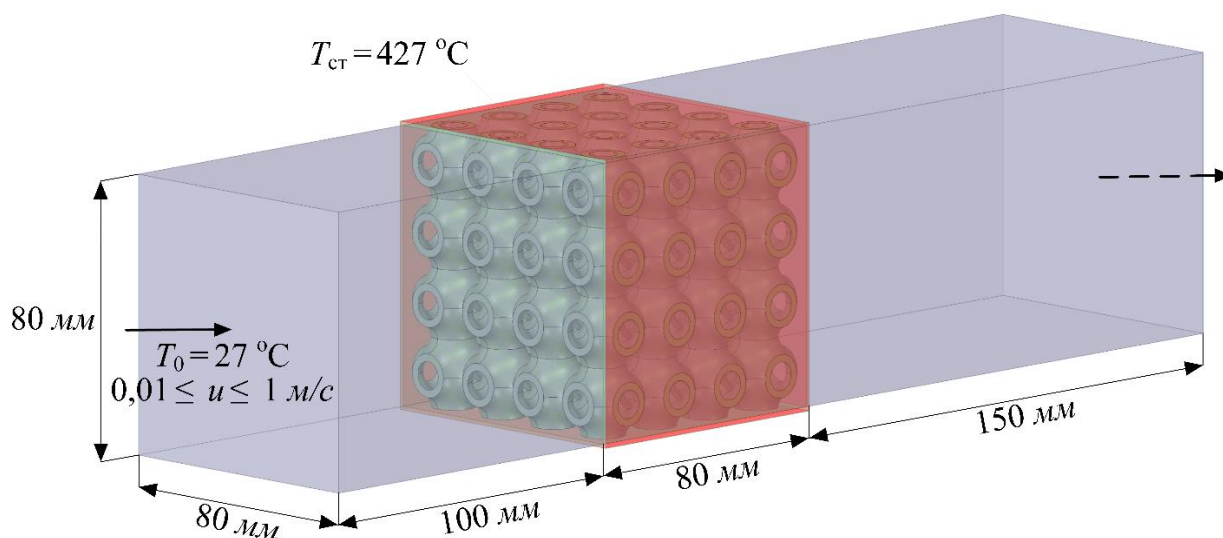


Рисунок 3.7. Схема задачи

На входе в канал температура жидкости составляет $T_0 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$, а начальная скорость потока изменяется в диапазоне от 0,01 до 1 м/с. Свойства жидкости, а также металла, из которого изготовлен канал и ТПМП-решетка, представлены в таблице 3.3. Ко всем боковым поверхностям на участке, где расположена пористая ТПМП вставка, применяется граничное условие первого рода при температуре стенки $T_{\text{ст}} = 427 \text{ }^\circ\text{C}$. Исследование течения жидкости в канале выполняется при двух комбинациях геометрических параметров элементарной ячейки, а именно: $a = 20 \text{ мм}$, $\delta = 1 \text{ мм}$ и $a = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$. Таким образом производится оценка влияния толщины стенки ячейки на характеристики потока.

Таблица 3.3. Свойства исследуемых материалов

Материал	Теплопроводность	Теплоемкость	Плотность	Вязкость
Вода	0,6 Вт/(м ^{°C})	4182 Дж/(кг ^{°C})	998,2 кг/м ³	0,001003 кг/м·с
Алюминий	202,4 Вт/(м ^{°C})	871 Дж/(кг ^{°C})	2719 кг/м ³	–

Конечно-элементная сетка для решения задачи изображена на рис. 3.8. При построение сетки использовались гексагональные элементы, поскольку они позволяют получить более точное решение и быстрое схождение на рассматриваемой геометрии по сравнению с тетраэдральной и кубической сеткой.

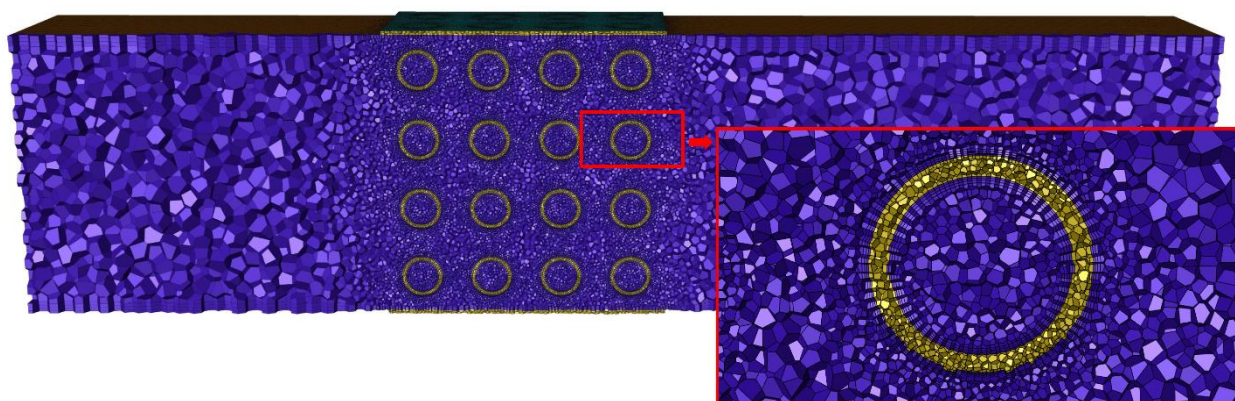


Рисунок 3.8. Конечно-элементная сетка

В рамках исследования был проведен анализ сеточной сходимости (см. рис. 3.9.) и определено, что наиболее оптимальным является решение на сетке, состоящей из 4 – 4,5 млн. ячеек, поскольку дальнейшее увеличение количества элементов не оказывает значительного влияния на точность решения, однако сильно увеличивает длительность и сложность решения.

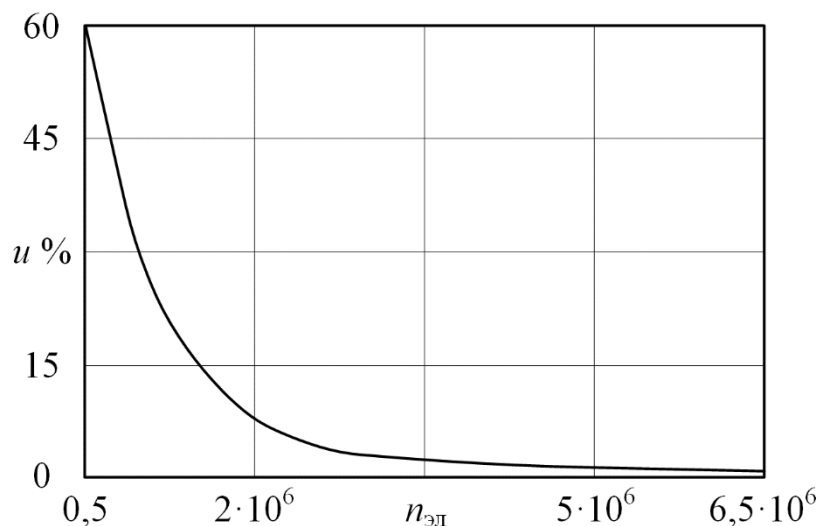


Рисунок 3.9. График сходимости сетки

При численном решении задачи тепломассопереноса в исследуемой геометрии при помощи метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS был принят ряд допущений:

1. Свойства материалов постоянны и не зависят от температуры.
2. Теплообмен с окружающей средой через стенки канала отсутствует.
3. Процесс стационарен, то есть скорость, давление и другие параметры не изменяются со временем.

В результате решения поставленной задачи методом конечных элементов были получены соответствующие поля распределения температуры и контуры скорости в исследуемой геометрии (см. рис. 3.10-3.11).

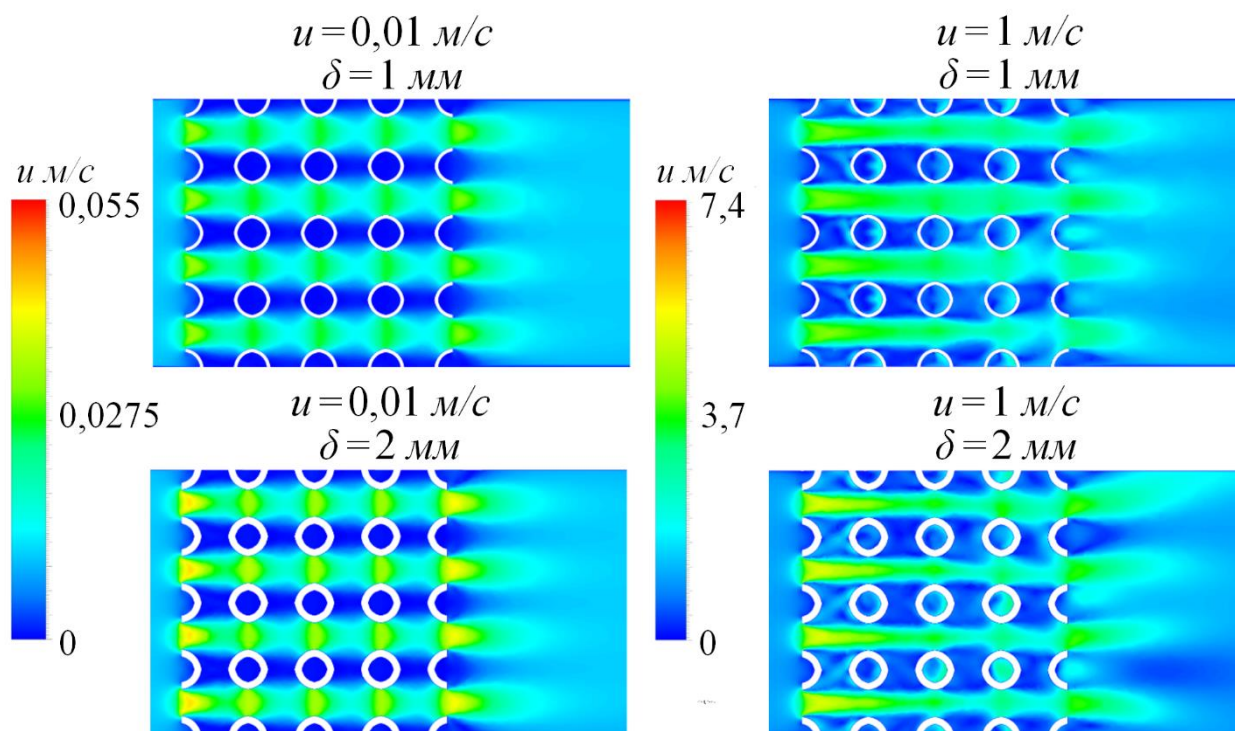


Рисунок 3.10. Контуры распределения скорости

Общий профиль скорости показывает, что турбулентности возникают в областях непосредственно около ТПМП-решетки, что способствует интенсификации теплообмена.

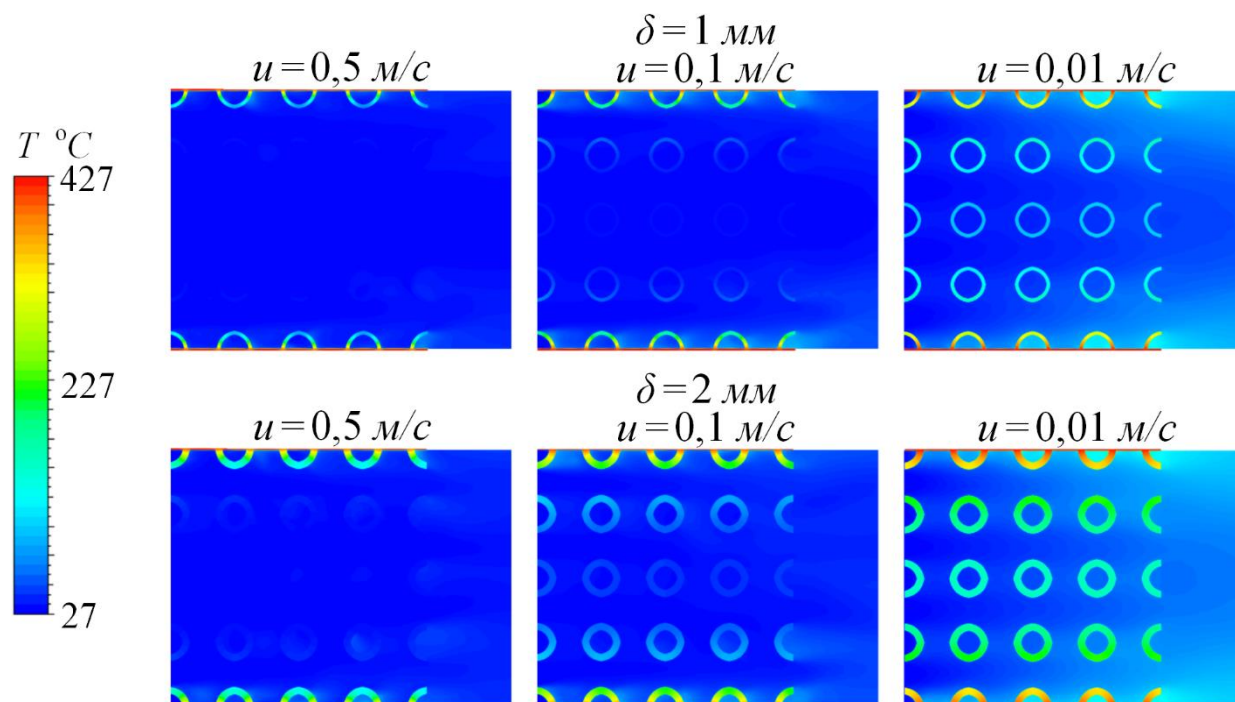


Рисунок 3.11. Контуры распределения температуры

На основе численного эксперимента получены графики зависимости потерь давления в канале и температуры жидкости на выходе из канала от начальной скорости потока (см. рис. 3.12).

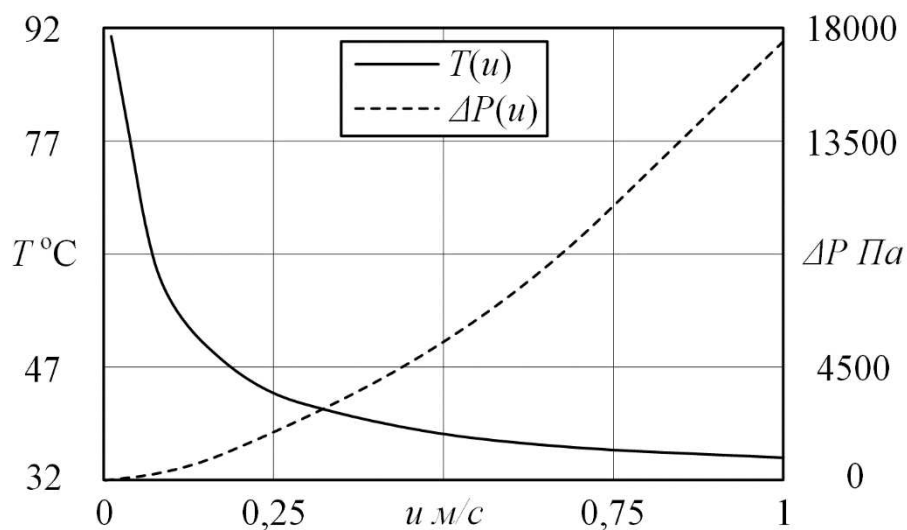


Рисунок 3.12. Графики зависимости температуры и потерь давления от начальной скорости потока при $a = 20$ мм, $\delta = 2$ мм

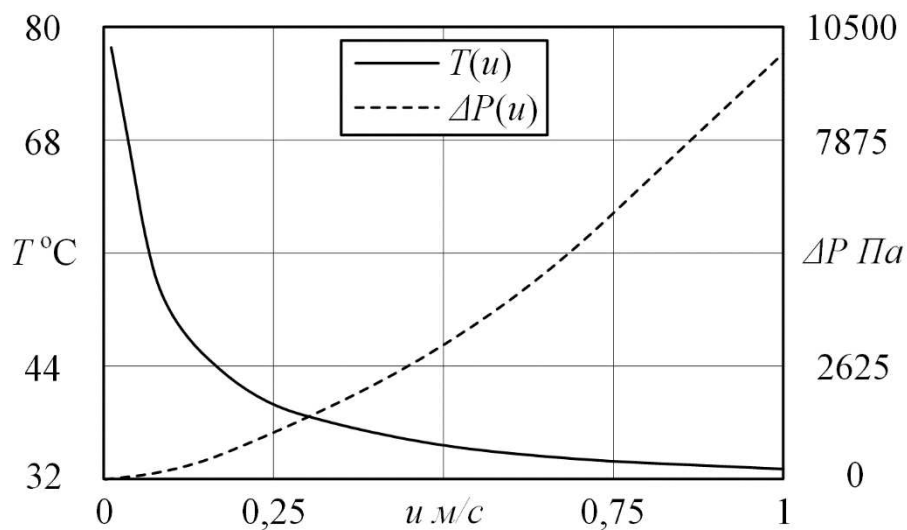


Рисунок 3.13. Графики зависимости температуры и потерь давления от начальной скорости потока при $a = 20$ мм, $\delta = 1$ мм

Анализ графиков на рисунках 3.12 и 3.13 позволяет заключить, что конфигурация оребрения оказывает значительное влияние на теплоотдачу. Увеличение толщины стенок ячеек в два раза приводит к увеличению

температуры жидкости на выходе на 15%. При этом потери давления увеличиваются на 70%.

Предложенная методика на основе численного эксперимента в ANSYS Fluent позволяет прогнозировать поведение системы при различных начальных скоростях потока, что может быть использовано при проектировании теплообменных устройств.

3.5. Прикладное применение пористых ТПМП-материалов

Разработанные в диссертации подходы к определению коэффициентов переноса в пористых материалах представляют большой интерес в области конструирования различного оборудования в космическом и авиационном машиностроении, энергетике, медицине и т.д. Особый интерес представляет применение пористых материалов, основанных на ТПМП.

Множество исследований подтверждает эффективность применения ТПМП конструкций в различных инженерных задачах. В настоящее время аддитивные технологии позволяют изготавливать сложные макро- и микрорешетчатые структуры, а также устройства на их основе из различных металлов и пластиков. Полезной функцией аддитивного производства является возможность изготовления сложных мультифункциональных конструкций в едином корпусе без дополнительной сборки [83]. В связи с этим перспективным является конструирования компактных теплообменных устройств на основе трижды периодических минимальных поверхностей [69,62]. Например, в работе Oh S. и др. [62] выполнено численное и экспериментальное исследование теплообменного устройства, в котором разделяющая среды стенка имеет форму ТПМП типа Gyroid. Исследования показывают, что подобная конструкция позволяет увеличить теплопередачу на 70-100% по сравнению с классическими рекуперативными теплообменниками.

В диссертации разработана модель теплообменного устройства, основанного на трижды периодической минимальной поверхности Шварца Р. Схема данного теплообменника изображена на рисунке 3.14.

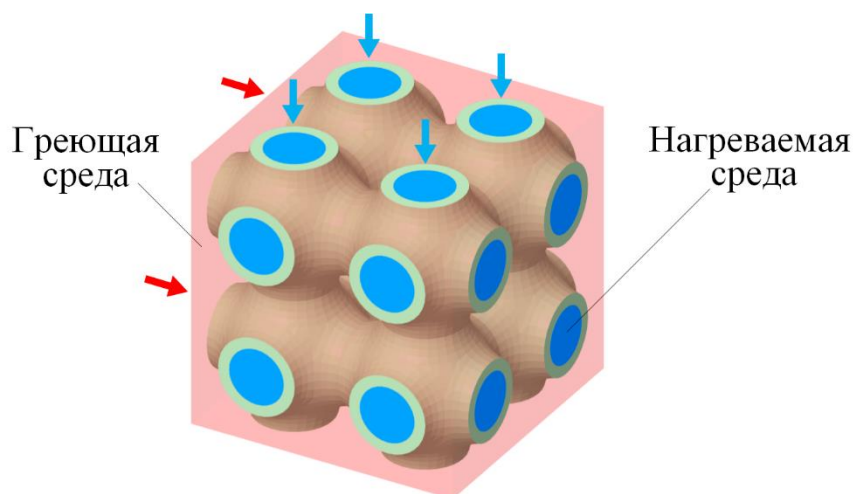


Рисунок 3.14. Схема ТПМП-теплообменника

Трижды периодическая минимальная поверхность Шварца Р делит пространство на два равных непересекающихся объема, по одному из которых движется греющая среда, а по другому – нагреваемая. Использование ТПМП в конструкции теплообменных устройств вместо классических трубных пучков позволяет значительно увеличить теплоотдачу и, следовательно, тепловую мощность устройств. В рамках диссертационной работы выполнено численное исследование отдельного элемента ТПМП-теплообменника (рис. 3.14) в ANSYS Fluent.

Тепловая мощность предлагаемой конструкции сравнивалась с мощностью трубчатого теплообменного устройства, имеющего аналогичные массогабаритные характеристики и расходы рабочих сред. Начальными условиями для потока нагреваемой среды во всех случаях являлись $T_x = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ и $u_0 = 0.1 \text{ м/с}$. Греющая среда, движущаяся перпендикулярно потоку нагреваемой среды, имеет начальную температуру $T_r = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$. Скорость потока греющей среды варьировалась в диапазоне от 0.1 до 1 м/с.

На рисунке 3.15 представлен график зависимости температуры нагреваемой среды и потерь давления от начальной скорости потока греющей среды.

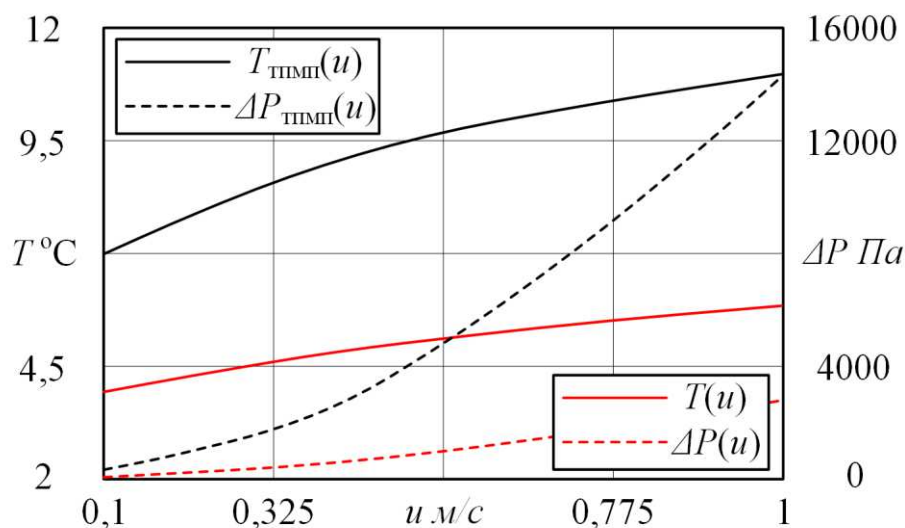


Рисунок 3.15. График зависимости потерь давления и тепловой мощности от скорости потока греющей среды

Из анализа графика на рис. 3.15 можно заключить, что ТПМП-теплообменник обладает большей тепловой мощностью по сравнению с трубчатый теплообменником при тех же массе и габаритах и том же гидравлическом сопротивлении. Данное преимущество во многом связано с увеличением площади теплообмена, а также с турбулизацией потока, вызванной особенностями геометрии трижды периодических минимальных поверхностей.

В диссертации также предложен вариант компоновки теплообменного устройства, основанного на ТПМП (см. рис. 3.16). На рисунке изображен теплообменник основанный на ТПМП Шварца Р. Красным и синим цветом обозначен ход движения греющей и нагреваемой сред соответственно.

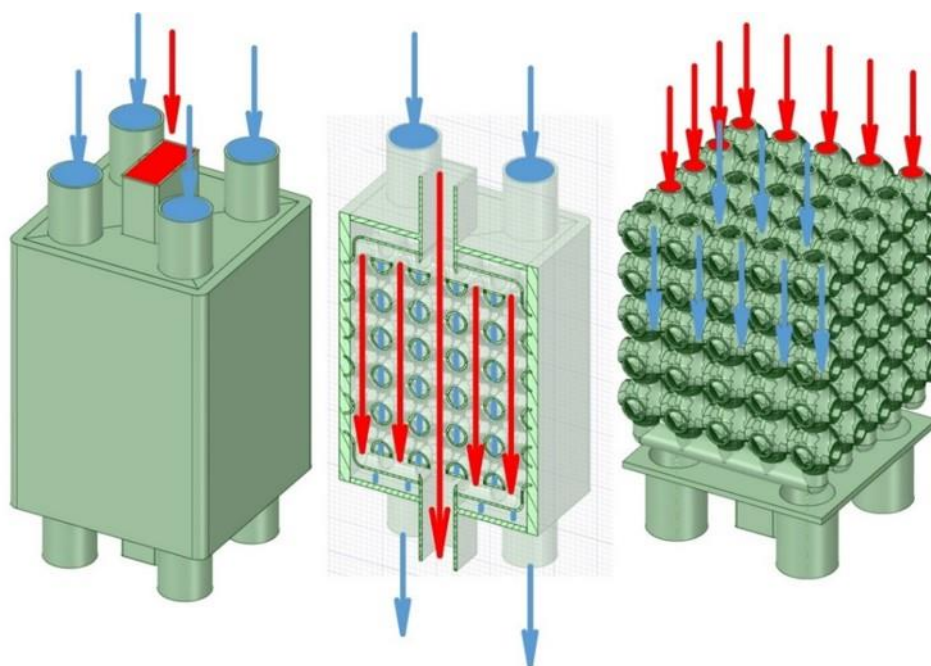


Рисунок 3.16. Вариант компоновки ТПМП-теплообменника

Другим применением трижды периодических минимальных поверхностей является тепловая изоляция различных устройств, зданий и сооружений и т.д. [35,81] Полученные в диссертации зависимости эффективной теплопроводности пористых ТПМП-материалов от их геометрических параметров (длина ребра куба, толщина стенки ячейки) позволяют проектировать и изготавливать тепловую изоляцию с прогнозируемыми свойствами. Стоит отметить, что тепловая изоляция, в конструкции которой используются ТПМП, обладает высокими прочностными характеристиками в отличие от традиционных пенных изоляций.

В ходе диссертационного исследования был изготовлен образец тепловой изоляции на основе трижды периодической минимальной поверхности Неовиуса (см. рис. 3.17). Изображенный на рисунке 3.17 образец изготовлен из фотополимерной смолы на 3D принтере Phrozen Sonic Mighty 4K и имеет значение коэффициента эффективной теплопроводности $\lambda_{эфф} = 0,02 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ \text{С})$ при $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ и $a = 8 \cdot 10^{-3}$ м без учета конвекции и теплопроводности воздуха внутри пор.

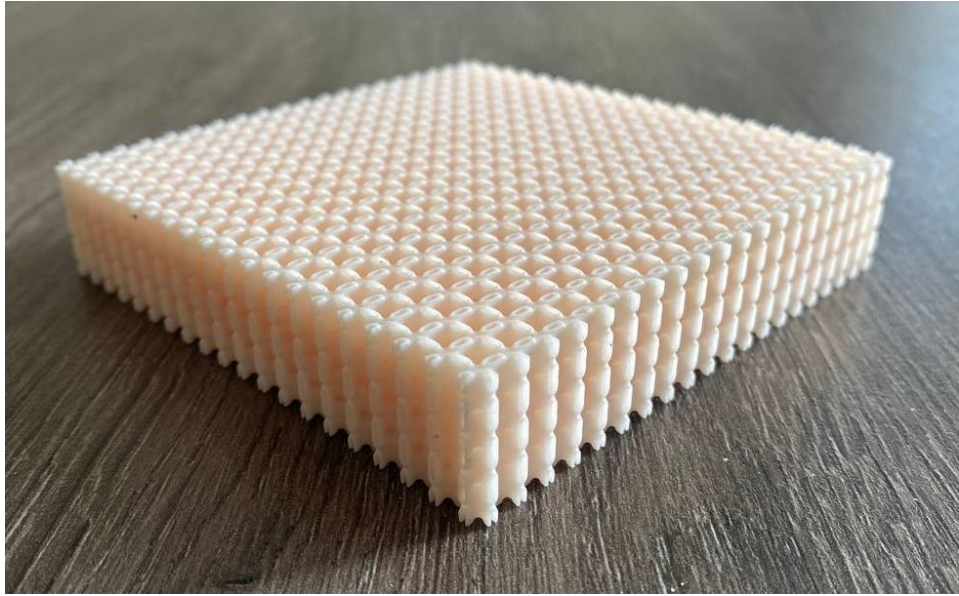


Рисунок 3.17. Образец тепловой изоляции на основе ТПМП

4. РАЗРАБОТКА МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МАТЕРИАЛАХ С УПОРЯДОЧЕННОЙ МАКРОСТРУКТУРОЙ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

В диссертации разработана и исследована модель теплопроводности, учитывающая пространственно-временную нелокальность процесса теплопереноса. В данной главе представлено модифицированное уравнение теплопроводности, полученное на основе введения релаксационных слагаемых непосредственно в закон сохранения энергии.

В п. 4.2 описан процесс разработки трехмерной модели теплопроводности, учитывающей пространственно-временную нелокальность, на основе теории двух фазного запаздывания. Применение данной модели продемонстрировано в п. 4.3 на примере решения задачи теплопроводности в элементарной ячейке трижды периодической минимальной поверхности Шварца Р.

В п. 4.4 представлено численное решение методом конечных разностей задачи теплопроводности в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой, основанной на ТПМП Шена I-WP, с учетом локальной неравновесности процесса.

4.1. Разработка модифицированной модели теплопроводности

Уравнение теплопроводности является одним из основных уравнений математической физики и играет ключевую роль в описании тепловых явлений. Наиболее распространенной моделью является диффузионная модель, которая описывается параболическим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T. \quad (4.1)$$

Вывод классического параболического уравнения теплопроводности основан на теории локального равновесия, при которой система находится в состоянии термодинамического равновесия в каждой точке пространства в

любой момент времени. При этом закон Фурье устанавливает линейную связь между тепловым потоком и градиентом температуры

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (4.2)$$

Однако данная модель может быть применима лишь в тех случаях, когда размер исследуемого объекта и время протекания процесса значительно больше внутренних масштабов системы (длина и время свободного пробега частиц). В связи с этим при попытке использования параболического уравнения теплопроводности на быстропротекающие и высокоинтенсивные процессы возникают различные парадоксы, к которым относится, например, бесконечное значение температурного градиента на поверхности исследуемого объекта в начальный момент времени. Это связано с тем, что согласно гипотезе Фурье тепловой поток мгновенно изменяется при любом изменении градиента, когда в действительности перенос энергии осуществляется за определенный промежуток времени, который зависит от физических свойств исследуемой среды. Для получения более точных температурных полей при малых значениях пространственной и временной переменных были разработаны модели, учитывающие пространственно-временную нелокальность исследуемого процесса. В основе таких теорий лежат различные принципы переноса энергии, к которым относятся фонон-электронное взаимодействие, фононное рассеивание, двухфазное запаздывание и др.

В диссертации разработана модель теплопроводности, полученная на основе модифицированной формы закона сохранения энергии. Для вывода дифференциального уравнения, учитывающего пространственно-временную нелокальность процесса теплопроводности, запишем уравнение теплового баланса в следующем виде

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(T + \sum_{k=1}^N \tau_k^k \frac{\partial^k T}{\partial t^k} \right) = -\operatorname{div} \left(\mathbf{q} + \sum_{k=1}^N r_k^k \frac{\partial^k \mathbf{q}}{\partial t^k} \right), \quad (4.3)$$

где τ_k , r_k – феноменологические коэффициенты релаксации.

Подставив (4.3) в выражении, соответствующее закону Фурье (4.2), получим дифференциальное уравнение теплопроводности, учитывающее запаздывание изменения температуры и теплового потока. В одномерном случае данное уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(T + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k T}{\partial t^k} \right) = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^N r_k \frac{\partial^{k+2} T}{\partial x^2 \partial t^k} \right). \quad (4.4)$$

При определенных значениях переменной N и коэффициентов τ_k , r_k уравнение (4.4) преобразуется в классическое параболическое или гиперболическое уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (N=0, \tau_k=0, r_k=0); \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (N=0, \tau_1 \neq 0, r_1=0). \quad (4.6)$$

Рассмотрим влияние релаксационных слагаемых первого порядка в уравнении (4.4) на температурные поля в бесконечно длинной пластине. В этом случае уравнение теплопроводности, а также граничные и начальные условия будут следующие:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + ar_1 \frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \quad (0 < x < l; t > 0); \quad (4.7)$$

$$T(x,0) = T_0; \quad (4.8)$$

$$T(\delta, t) = T_{\text{ст}}; \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (4.11)$$

где l – половина толщины пластины; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; T_0 – начальная температура.

Приведем задачу (4.7) – (4.11) к безразмерному виду. Для этого введем следующие безразмерные параметры

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{cr}}}{T_0 - T_{\text{cr}}}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{l^2}; \quad \text{Fo}_1 = \frac{a\tau_1}{l^2}; \quad R_1 = \frac{ar_1}{l^2} \quad (4.12)$$

где Θ , ξ , Fo , Fo_1 , R_1 – безразмерные температура, координата, время и коэффициенты релаксации соответственно.

С учетом параметров (4.12) краевая задача будет

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + R_1 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}} \quad (0 < \xi < 1; \text{Fo} > 0); \quad (4.13)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (4.14)$$

$$\Theta(1, \text{Fo}) = 0; \quad (4.15)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0; \quad (4.16)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \right|_{\text{Fo}=0} = 0. \quad (4.17)$$

Точное аналитическое решение задачи (4.13) – (4.17) имеет следующий вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^4 C_{nm} \exp(z_{nm} \text{Fo}) \cos\left((2m-1) \frac{\pi}{2} \xi \right) \right\}, \quad (4.18)$$

где C_{nm} , z_{nm} – коэффициенты определяемые при решении задачи.

В настоящей работе решение задачи (4.13) – (4.17) осуществляется методом конечных разностей. Для этого введем на расчётной области пространственно-временную сетку

$$\xi_j = j\Delta\xi, \quad \text{Fo}_i = i\Delta\text{Fo}, \quad (4.19)$$

где $j = \overline{0, J}$, $i = \overline{0, I}$; $\Delta\xi$, ΔFo – шаг по координате и по времени соответственно.

Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (4.13) – (4.17) может быть записана в виде

$$\frac{\Theta_j^i - \Theta_j^{i-1}}{\Delta\text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\Theta_j^{i+1} - 2\Theta_j^i + \Theta_j^{i-1}}{\Delta\text{Fo}^2} = \frac{\Theta_{j-1}^i - 2\Theta_j^i + \Theta_{j+1}^i}{\Delta\xi^2} +$$

$$+ R_1 \frac{(\Theta_{j+1}^i - 2\Theta_j^i + \Theta_{j+1}^i) - (\Theta_{j+1}^{i-1} - 2\Theta_j^{i-1} + \Theta_{j+1}^{i-1})}{\Delta\xi^2 \Delta Fo}; \quad (4.20)$$

$$\Theta_j^0 = 1; \quad (4.21)$$

$$\Theta_j^i = 0; \quad (4.22)$$

$$\frac{\Theta_{\Delta\xi}^i - \Theta_0^i}{\Delta\xi} = 0; \quad (4.23)$$

$$\frac{\Theta_j^{\Delta Fo} - \Theta_j^0}{\Delta Fo} = 0. \quad (4.24)$$

В результате численного исследования процесса теплопроводности в пластине с учетом однократной релаксации левой и правой части уравнения (4.4) были получены графики изменения температуры по времени и координате (рис. 4.1, 4,2).

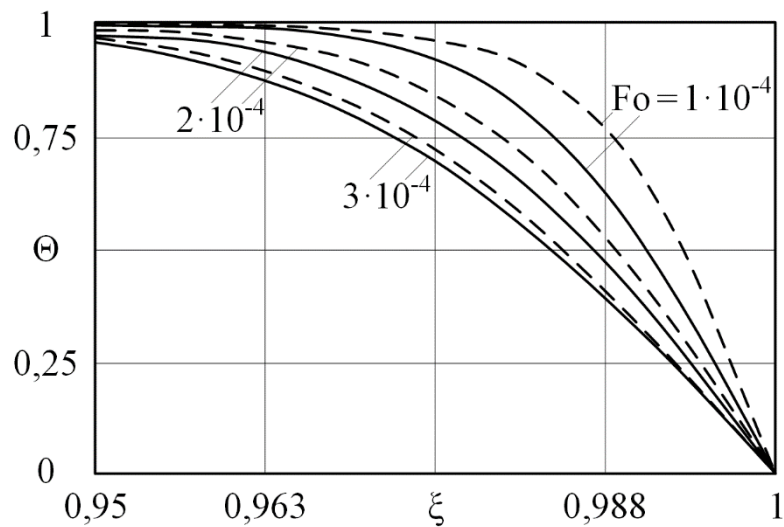


Рисунок 4.1. Распределение температуры по координате при $R_1 = Fo_1 = 10^{-4}$: –

– – – модель с запаздыванием; ——— диффузионная модель.

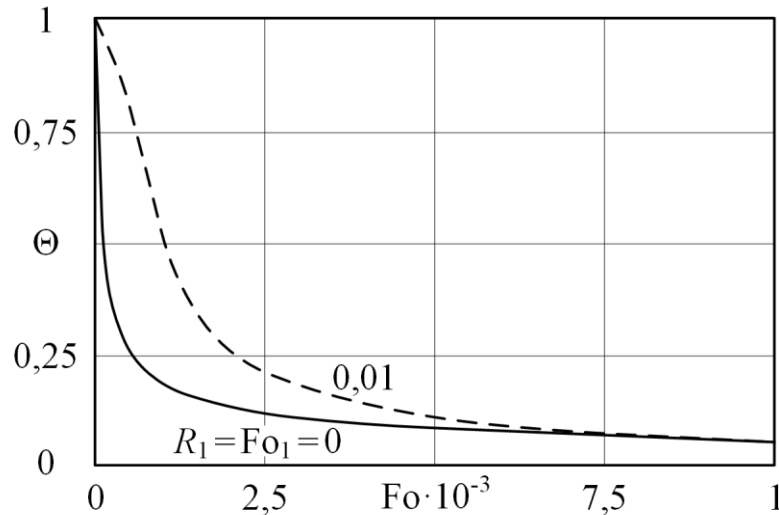


Рисунок 4.2. Изменение температуры во времени в точке $\xi = 0.99$:

— — — — модель с запаздыванием; ————— диффузионная модель.

Анализ рисунков позволяет заключить, что учет релаксационных слагаемых в дифференциальном уравнение теплопроводности приводит к задержке изменения температуры в пластине при малых значениях пространственной и временной переменных.

4.2. Разработка трехмерной локально-неравновесной модели теплопроводности

В п. 4.1 диссертационной работы рассматривается вывод дифференциального уравнения теплопроводности, основанный на введении дополнительных слагаемых в уравнение теплового баланса, учитывающих запаздывание отклика системы на внешнее возмущение в микро- и наномасштабных системах. Однако, существуют и другие модели, для которых свойственно введение релаксационных слагаемых в дифференциальное уравнение теплопроводности, одной из которых является DPL (Dual-Phase Lag). В диссертации получена трехмерная модель теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности, основанная на теории двухфазного запаздывания [106].

Запишем закон теплопроводности Фурье в векторной форме

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \text{grad}T(\mathbf{r}, t), \quad (4.25)$$

где $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = (q_x, q_y, q_z)$ – вектор плотности теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности; $\text{grad}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ – градиент температуры.

DPL модель теплопроводности является расширением классической гипотезы Фурье (4.25). В отличие от классической модели, которая основана на предположении, что изменение температуры и теплового потока происходят мгновенно, DPL модель учитывает фазовые задержки как для температуры, так и для теплового потока. Согласно данной теории релаксационные слагаемые вводятся непосредственно в закон теплопроводности, который записывается в следующем виде

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + \tau_1) = -\lambda \text{grad}T(\mathbf{r}, t + r_1), \quad (4.26)$$

где τ_1, r_1 – коэффициенты релаксации.

Разложим левую и правую части функции (4.26) в ряд Тейлора и ограничившись первым слагаемым получим

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \tau_1 \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda \left(\text{grad}T(\mathbf{r}, t) + r_1 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}T(\mathbf{r}, t) \right). \quad (4.27)$$

Выразив из (4.27) тепловой поток $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ и подставив его в закон сохранения энергии

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t), \quad (4.28)$$

где c – удельная теплоемкость; ρ – плотность, получим

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\tau_1 \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \lambda \left(\Delta T + r_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta T \right), \quad (4.29)$$

где $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ – оператор Лапласа. При подстановке дивергенции потока из (4.28) в (4.29) получается дифференциальное уравнение теплопроводности, учитывающее релаксацию теплового потока и температуры в соответствии с DPL моделью

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (T - ar_1 \Delta T) = a \Delta T, \quad (4.30)$$

где $a = \lambda / (\rho c)$ – коэффициент температуропроводности.

В диссертации для решения трехмерной задачи теплопроводности используется модуль Thermal программного комплекса ANSYS, решатель которого основан на методе конечных элементов (МКЭ). В соответствии с МКЭ разделим исследуемую расчётную область на конечное число элементов и будем отыскивать значение температуры в каждом узле сетки T_j , $j = 1, \dots, n$, где n – количество узлов. Температурное поле в этом случае будет аппроксимироваться суммой

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{j \in E(\mathbf{r})} N_j(\mathbf{r}) T_j(t), \quad (4.31)$$

где $E(\mathbf{r})$ – множество узлов конечного элемента, внутри которого расположена точка с радиусом-вектором \mathbf{r} , $N_j(\mathbf{r})$ – функция формы элемента. Составим взвешенную невязку уравнения (4.30) для каждого узла $i = 1, \dots, n$, которая с учетом (4.31) будет

$$\int_V N_i \left[\tau_1 \sum_j N_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_j N_j T_j - ar_2 \sum_j \Delta N_j T_j \right) - a \sum_j \Delta N_j T_j \right] dV = 0, \quad (4.32)$$

где V – объем расчетной области. Используем теорему Гаусса для перехода от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности при этом понизив порядок производных, входящих в (4.32). Согласно теореме

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} dS, \quad (4.33)$$

где \mathbf{F} – векторное поле; S – поверхность, ограничивающая объем V .

Для дальнейших преобразований введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} I_1 &= \tau_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V N_i \sum_j N_j T_j dV, & I_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V N_i \sum_j N_j T_j dV, \\ I_3 &= ar_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_V N_i \sum_j \Delta N_j T_j dV, & I_4 &= a \int_V N_i \sum_j \Delta N_j T_j dV, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где $I_1 = \tau_1 \frac{\partial I_2}{\partial t}$, $I_3 = r_1 \frac{\partial I_4}{\partial t}$.

Выражение (4.32) с учетом принятых обозначений примет вид

$$\tau_1 \frac{\partial I_2}{\partial t} + I_2 - r_1 \frac{\partial I_4}{\partial t} - I_4 = 0. \quad (4.35)$$

Из анализа (4.35) можно заключить, что интегралы I_2 и I_4 являются независимыми. Применим к I_4 теорему Гаусса, подставив при этом в левую часть (4.33) некоторую функцию $\varphi \mathbf{F}$

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{F}) dV = \int_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{F} dV + \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{F} dV, \quad (4.36)$$

где φ – скалярная функция.

Преобразуя интеграл по объему в интеграл по поверхности, получим

$$\int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oint_S \varphi \mathbf{F} d\mathbf{S} - \int_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{F} dV. \quad (4.37)$$

Подставим в (4.37) $\varphi = aN_i$ и $\mathbf{F} = \sum_j \operatorname{grad} N_j T_j$

$$\begin{aligned} I_4 &= a \int_V N_i \sum_j \Delta N_j T_j = \\ &= a \oint_S N_i \sum_j \operatorname{grad} N_j T_j \cdot d\mathbf{S} - a \int_V \operatorname{grad} N_i \cdot \sum_j \operatorname{grad} N_j T_j dV. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Запишем уравнение (4.30) в матричной форме

$$\tau_1 [C] \{\ddot{T}\} + [C] \{\dot{T}\} + r_1 [\lambda] \{\dot{T}\} + [\lambda] \{T\} - \{Q\} = \{0\}, \quad (4.39)$$

или

$$\tau_1 [C] \{\ddot{T}\} + ([C] + r_1 [\lambda]) \{\dot{T}\} + [\lambda] \{T\} = \{Q\}. \quad (4.40)$$

где $[C] = \rho c_p \int_V N_i N_j dV$ – матрица удельной теплоемкости;

$[\lambda] = \oint_S \alpha N_i N_j dS + \int_V \lambda \operatorname{grad} N_i \operatorname{grad} N_j dV$ – матрица теплопроводности;

$\{Q\} = \oint_S \alpha N_i T_c dS + \oint_S N_i q_e dS$ – вектор теплового потока; $\{T\} = T_j, j = 1, \dots, n$ –

вектор неизвестных узловых температур.

Уравнение (4.40) – это матричная форма уравнения теплопроводности в терминологии метода конечных элементов, которая учитывает локальную неравновесность процесса.

Стандартный инструментарий ANSYS позволяет решать лишь классическое уравнение теплопроводности вида $[C]\{\dot{T}\} + [\lambda]\{T\} = \{Q\}$. Для численного интегрирования по времени уравнения (4.40) в диссертации разработан APDL – алгоритм. Обозначим $\{T_t\}$ как вектор температуры в момент времени t . В уравнении (4.40) необходимо заменить производные конечно – разностными аналогами. Для этого применим схему интегрирования, которой соответствует вычисление «углового коэффициента» на конце интервала $[t, t + \Delta t]$. В этом случае значение переменной в следующий момент времени определяется из решения уравнения $T_{t+\Delta t} = T_t + f(x_{t+\Delta t}, t)\Delta t$

$$\tau_1 [C] \left(\frac{\{T_{t+\Delta t}\} - \{T_t\} - \{\dot{T}_t\} \Delta t}{\Delta t^2} \right) + ([C] + r_1 [\lambda]) \left\{ \frac{\{T_{t+\Delta t}\} - \{T_t\}}{\Delta t} \right\} + [\lambda] \{T_{t+\Delta t}\} = \{Q\}, \quad (4.41)$$

или после преобразования

$$\begin{aligned} & (\tau_1 [C] + ([C] + r_1 [\lambda]) \Delta t + [\lambda] \Delta t^2) \{T_{t+\Delta t}\} = \\ & = \{Q\} \Delta t^2 + \tau_1 [C] (\{T_t\} + \{\dot{T}_t\} \Delta t) + ([C] + r_1 [\lambda]) \{T_t\} \Delta t. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Формула (4.42) представляет собой рекуррентное соотношение для вектора температуры. Применяя аналогичный подход для теплового потока из (4.27) получим

$$\{\mathbf{q}_{t+\Delta t}\} + \tau_1 \left(\frac{\{\mathbf{q}_{t+\Delta t}\} - \{\mathbf{q}_t\}}{\Delta t} \right) = \{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\} + r_1 \left(\frac{\{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\} - \{\hat{\mathbf{q}}_t\}}{\Delta t} \right), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.43)$$

откуда

$$\{\mathbf{q}_{t+\Delta t}\} = \frac{\{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\} \Delta t + \tau_1 \{\mathbf{q}_t\} + r_1 (\{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\} - \{\hat{\mathbf{q}}_t\})}{\Delta t + \tau_1}, \quad (4.44)$$

где $\hat{\mathbf{q}} = -\lambda \text{grad} T$ – классический тепловой поток.

Итерационные процессы, описываемые выражениями (4.42) и (4.44), реализованы в предложенном APDL – алгоритме, который подробно описан в п. 5.1 диссертации.

4.3. Исследование локально-неравновесного процесса теплопроводности в пористом материале с упорядоченной макроструктурой

Пористые материалы, в том числе материалы с упорядоченной макроструктурой, широко применяются в различных областях инженерии и медицины. Разработка, например, углеродных нанотрубок имеет широкий потенциал в создании биосенсеров, электродов и других приборов. В связи с этим важной задачей является определение температурного состояния таких материалов в ситуациях, когда характерное время процесса соизмеримо со временем релаксации. В соответствии с трехмерной моделью теплопроводности, описанной в п. 4.2 и учитывающей локальную-неравновесность, в диссертации выполнено численное исследование данного процесса в программном комплексе ANSYS.

Рассмотрим задачу теплопроводности в элементарной ячейке ТПМП Шварца Р. Схема задачи изображена на рис. 4.3. Характерными геометрическими размерами исследуемой ячейки являются $a = 1$ мм и $\delta = 0.1$ мм. На грани, отмеченной на рис. 4.3, задается граничное условие первого рода $T_1 = 0$ °С, а начальная температура тела $T_0 = 100$ °С. При численном решении задачи были приняты следующие допущения:

1. На всех поверхностях элементарной ячейки, кроме той, на которой задается граничное условие, теплообмен отсутствует;
2. Теплофизические свойства материала, из которого состоит элементарная ячейка известны (см. табл. 4.1) и постоянные (не зависят от температуры).

Таблица 4.1. Теплофизические свойства материалов

Материал	Теплопроводность	Теплоемкость	Плотность
Сталь	60,5 Вт/м ²	434 Дж/(кг·К)	7850 кг/м ³

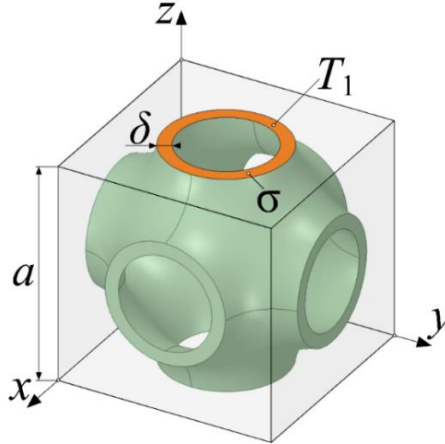


Рисунок 4.3. Схема задачи

Для решения поставленной задачи методом конечных элементов применяется APDL – функция Thermal Relax, встроенная в модуль Thermal программного комплекса ANSYS. Данная функция основана на алгоритме решения трехмерной задачи теплопроводности, описанном в п. 4.2, с учетом локального неравновесия.

В результате численного исследования теплопроводности были получены графики распределения температуры в элементарной ячейке Шварца Р при различных значениях коэффициентов релаксации (см. рис. 4.4).

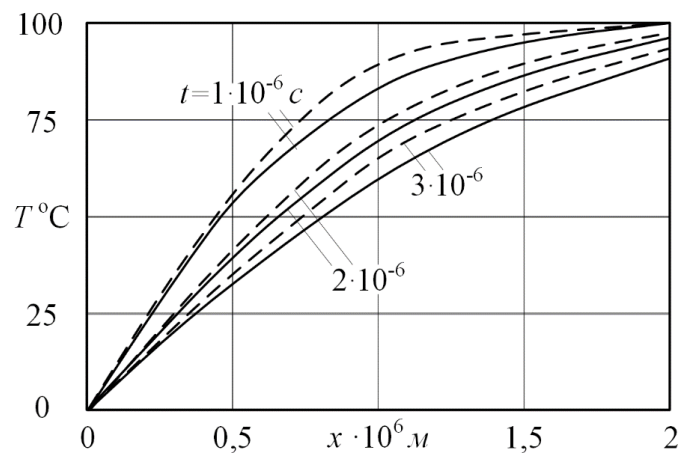


Рисунок 4.4. Распределение температуры в ячейке:

$$- - - - \tau_1 = r_1 = 10^{-6}; \quad \text{—} \quad \tau_1 = r_1 = 0$$

Из анализа рисунка 4.4 видно, что охлаждение ячейки вблизи области принятия граничного условия первого рода происходит с некоторой задержкой, которая зависит от значений коэффициентов релаксации τ_1 и r_1 .

4.4. Исследование теплопроводности в пористой бесконечно протяженной пластине с учетом релаксации

В диссертации выполнено исследование теплопроводности в бесконечно протяженной пластине с упорядоченной пористой структурой с учетом локальной неравновесности процесса при граничных условиях первого рода.

Схема задачи изображена на рисунке 4.5.

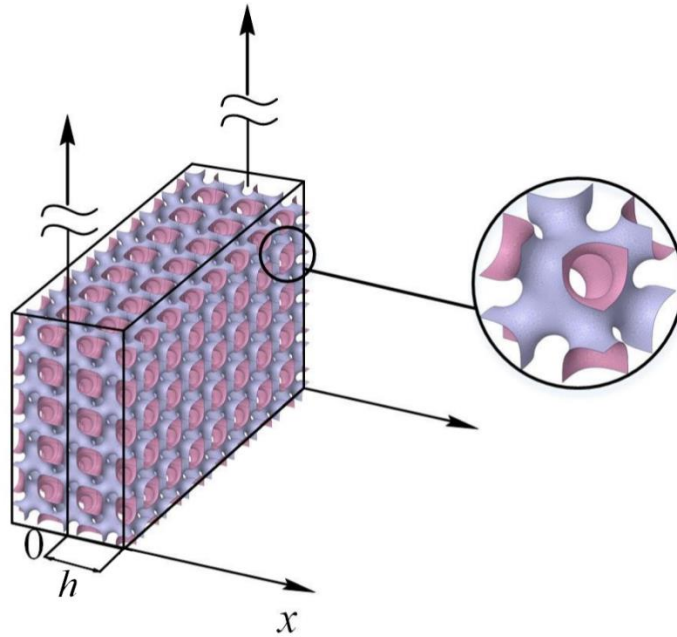


Рисунок 4.5. Схема задачи

Краевая задача для сформулированной проблемы будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left[\frac{\lambda_{эфф}}{c\rho_m(1-\phi)} \right] \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[\frac{\lambda_{эфф}}{c\rho_m(1-\phi)} \right] r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \quad (0 < x < h; t > 0); \quad (4.45)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (4.46)$$

$$T(h, t) = T_{ст}; \quad (4.47)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (4.48)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (4.49)$$

где ϕ – пористость; T_0 – начальная температура; $T_{ст}$ – температура стенки; ρ_m – плотность исходного материала; h – половина толщины пластины.

В данном исследовании рассматривается пористый материал с упорядоченной структурой, основанной на ТППП Шена I-WP, изготовленный из фотополимерной смолы. Теплофизические свойства фотополимерной смолы, а также начальные и граничные условия для задачи представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Теплофизические свойства материала и условия задачи

Теплопроводность, λ_m	0,375 Вт/м ²
Теплоемкость, c	800 Дж/(кг·К)
Плотность, ρ_m	1412 кг/м ³
Начальная температура, T_0	0 °С
Температура стенки, $T_{ст}$	50 °С
Толщина, h	10 ⁻³ м

Решение задачи (4.45) – (4.49) осуществляется методом конечных разностей. Для этого введем на расчётной области пространственно-временную сетку

$$x_j = j\Delta x, \quad t_i = i\Delta t, \quad (4.50)$$

где $j = \overline{0, J}$, $i = \overline{0, I}$; Δx , Δt – шаг по координате и по времени соответственно.

Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (4.45) – (4.49) может быть записана в виде

$$\frac{T_j^i - T_j^{i-1}}{\Delta t} + \tau_1 \frac{T_j^{i+1} - 2T_j^i + T_j^{i-1}}{\Delta t^2} = \left[\frac{\lambda_{эфф}}{c\rho_m(1-\phi)} \right] \frac{T_{j-1}^i - 2T_j^i + T_{j+1}^i}{\Delta x^2} +$$

$$+ \left[\frac{\lambda_{\text{эфф}}}{c\rho_m(1-\phi)} \right] r_1 \frac{(T_{j-1}^i - 2T_j^i + T_{j+1}^i) - (T_{j-1}^{i-1} - 2T_j^{i-1} + T_{j+1}^{i-1})}{\Delta x^2 \Delta t}; \quad (4.51)$$

$$T_j^0 = T_0; \quad (4.52)$$

$$T_j^i = T_{\text{ст}}; \quad (4.53)$$

$$\frac{T_{\Delta\xi}^i - T_0^i}{\Delta x} = 0; \quad (4.54)$$

$$\frac{T_j^{\Delta Fo} - T_j^0}{\Delta t} = 0. \quad (4.55)$$

В результате численного решения задачи теплопроводности в пористой пластине были получены графики распределения температуры по толщине пластины при различных значениях коэффициентов релаксации (см. рис. 4.6).

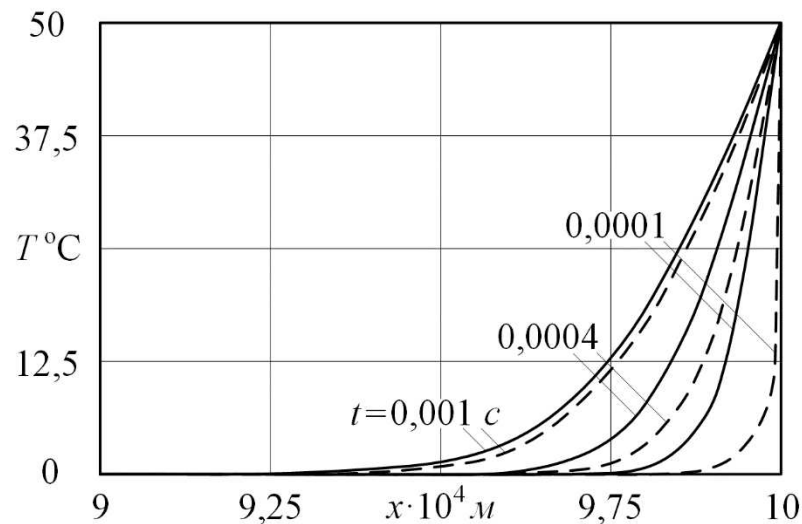


Рисунок 4.6. Распределение температуры в пластине:

$$\text{—} \tau_1 = r_1 = 0; \quad \text{- - -} \tau_1 = r_1 = 10^{-3}$$

Анализ графика позволяет заключить, что учет релаксационных слагаемых оказывает значительное влияние на температурный профиль в пластине. С увеличением значений коэффициентов релаксации задержка изменения температуры вблизи к координате $x = 0.001$ м значительно возрастает. Также отмечается, что с увеличением длительности процесса нагрева локально-неравновесная модель приближается к классической диффузионной модели теплопроводности.

5. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ЧИСЛЕННО – АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

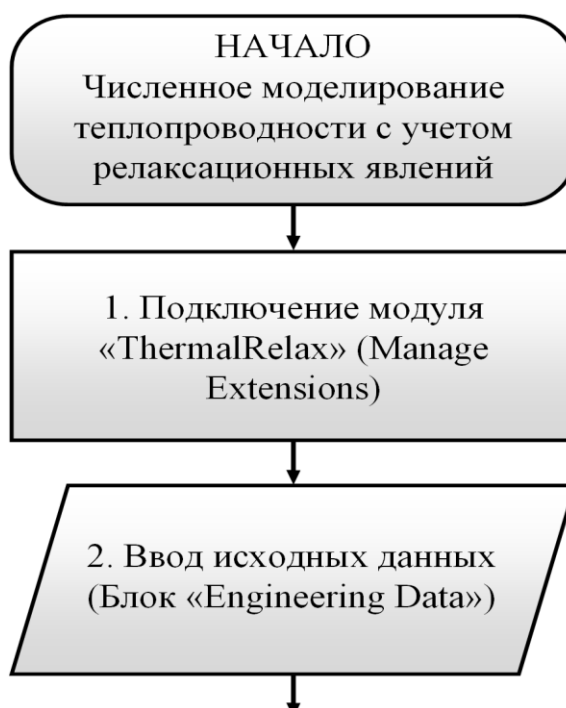
В главе 5 диссертации представлены результаты разработки алгоритмов решения задач, описанных в п. 2.3.1, 2.3.2, в программном комплексе MathCAD.

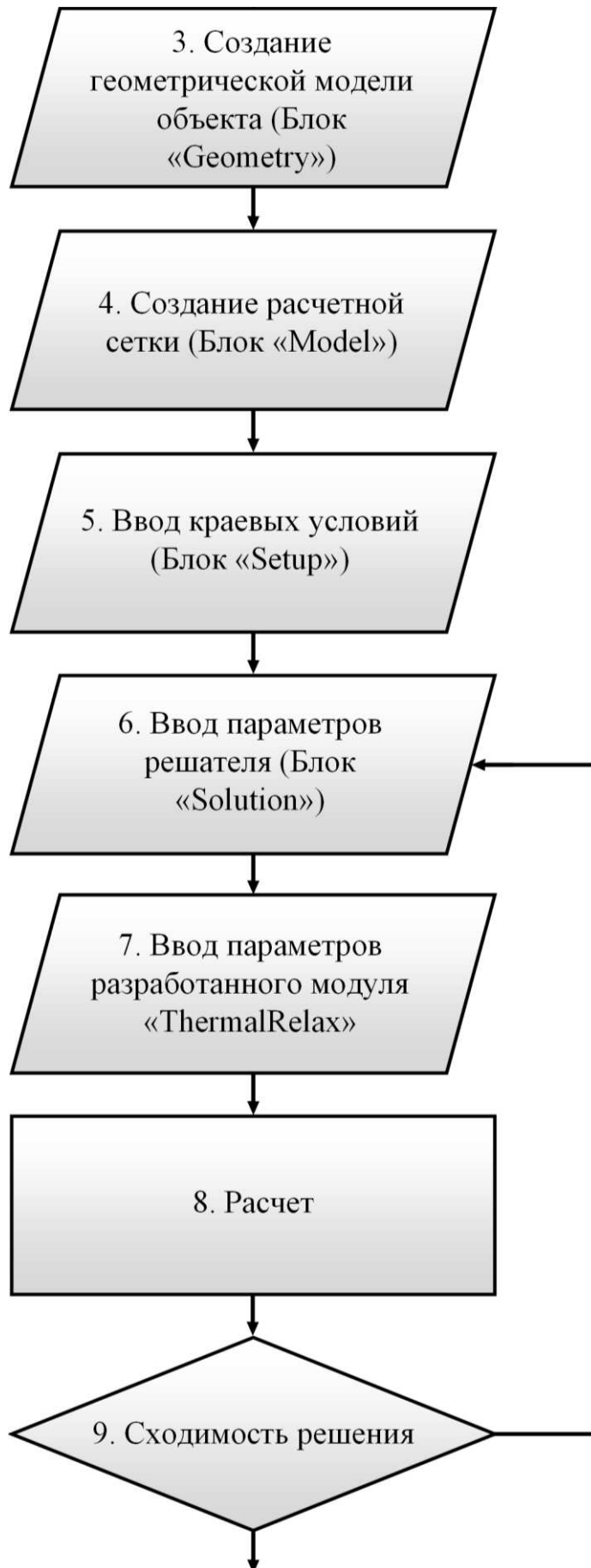
Также представлен APDL – алгоритм для решения трехмерной задачи теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности в программном комплексе ANSYS

Свидетельства о государственной регистрации представленных программных комплексов приведены в приложении.

5.1. Реализация метода решения трехмерных задач теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты

При помощи средств автоматизации расчетов в программном комплексе ANSYS, был разработан алгоритм на языке APDL. Этот алгоритм предназначен для проведения расчетов температурных полей в телах со сложной геометрической формой, учитывая конечную скорость распространения тепла. Общая схема решения задачи теплопроводности с использованием модуля «ThermalRelax» представлена на рисунке 5.1.





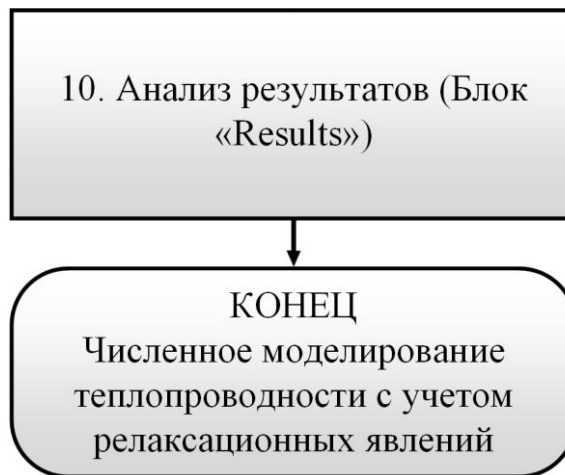


Рисунок 5.1. Укрупненная блок – схема решения задач локально – неравновесного теплопереноса в программном модуле «ThermalRelax»

Рассмотрим результаты разработки вычислительного алгоритма, написанного на языке программирования APDL (ANSYS Parametric Design Language). Данный алгоритм впервые позволил исследовать температурные поля в телах сложной геометрической формы (в том числе в пористых телах со структурой, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях), учитывая инерционность процесса теплопереноса. Ниже приведен программный код, который адаптирован для использования в ANSYS Mechanical Enterprise Utility Menu:

1) Системные операции: удаление всех переменных; получение имени проекта

```

*FREE, ALL
*DEL, ALL, , NOPR
ALLSEL, ALL, ALL
*GET, NAME, ACTIVE, 0, JOBNAM
  
```

2) Блок ввода исходных данных

2.1) Ввод номеров узлов, по которым будет построена «измерительная ось» для вывода температуры

```

P1 = NODE(KX(16), KY(16), KZ(16))
P2 = NODE(KX(14), KY(14), KZ(14))
/PREP7
  
```

2.2) Ввод температуры, определяемой граничным условием первого рода

`T_MAX = 0.0`

2.3) Задание начального условия. Данное значение температуры в начальный момент времени будет присвоено всем узлам, в которых не задано T_MAX

`T_INIT = 1.0`

2.4) Ввод величины шага по временной переменной

`TIME_STEP = 1e-3`

2.5) Вычисление конечного времени интегрирования (определяется количеством шагов по временной переменной)

`END_TIME = 100.0*TIME_STEP`

`TOTAL_TIME = 0.0`

2.6) Ввод коэффициентов релаксации

`TAU1 = 1`

`TAU2 = 1`

2.7) Системные операции: удаление ограничений на значения температуры; выбор компонента с узлами для задания постоянной температуры; формирование массивов узлов для задания постоянной температуры; присвоение постоянной температуры; инверсия выборки

`DDELE, ALL, ALL`

`CMSEL, S, CONSTR_NODES`

`*VGET, CONSTRAINED_NODES, NODE, , NLIST, ,`

`*GET, N_CONSTR, PARM, CONSTRAINED_NODES, DIM, 1`

`*DO, I, 1, N_CONSTR`

`D, CONSTRAINED_NODES(I), TEMP, T_MAX`

`*ENDDO`

`NSEL, INVE`

`*VGET, NODES, NODE, , NLIST, ,`

```
*GET, N, PARM, NODES, DIM, 1
NSEL, ALL
```

3) Работа с матрицами проводимости и теплоемкости

3.1) Получение суммы матриц проводимости и теплоёмкости

```
/SOLU
ANTYPE, 4
TRNOPT, FULL
LUMPM, 0
TIMINT, ON
WRFULL, 1
TIME, 1
SOLVE
/POST1
*SMAT, K_AND_C, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*GET, SCAL_FACTOR, ACTIVE, 0, SOLU, DTIME
```

3.2) Получение матрицы проводимости

```
/SOLU
ANTYPE, 0
TIMINT, OFF !STEADY STATE, K = K
WRFULL, 1
SOLVE
WRFULL, 0
/POST1
*SMAT, K, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*SMAT, K_, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*VEC, Q, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, RHS
*SMAT, Nod2Bcs, D, IMPORT, FULL, %name%.full, NOD2BCS
*VEC, MAPFORWARD, I, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL,
FORWARD
```

```
*SMAT, C, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*AXPY, 1, 0, K_AND_C, -1, 0, C !MATM = MATK_PLUS_C - MATK
*SCAL, C, SCAL_FACTOR !C
```

4) Формирование матрицы системы для определения нового значения температуры, факторизация матрицы

```
*VEC, T0, D, ALLOC, Q_DIM !T0 – вектор температур на текущем шаге
*INIT, T0, CONST, T_INIT ! инициализация вектора температур
*VEC, T_DOT, D, ALLOC, Q_DIM !T_DOT - вектор производной
температуры по времени
*INIT, T_DOT, CONST, 0.0
*VEC, RHS, D, ALLOC, Q_DIM
*VEC, T_NEW, D, ALLOC, Q_DIM !T_NEW - вектор температур на
следующем шаге
*AXPY, .0, 0.0, C, TAU2, 0.0, K_ ! [C] + TAU2*[K_]
*AXPY, TIME_STEP, 0.0, K_, TIME_STEP**2, 0.0, K ! ([C] +
TAU2*[K])*TIME_STEP + [K]*TIME_STEP**2
*AXPY, TAU1, 0.0, C, 1.0, 0.0, K !TAU1*[C]+([C] +
TAU2*[K])*TIME_STEP + [K]*TIME_STEP**2
*LSENGINE, BCS, MY_SOLVER, K, INCORE
*LSFACTOR, MY_SOLVER
```

5) Системные операции: выбор всех узлов модели; определение числа узлов; присвоение узлам начальной температуры; присвоение узлам температуры, определяемой граничным условием

```
/PREP7
NSEL, ALL
DDELE, ALL, ALL
*VGET, ALL_NODES, NODE, , NLIST, ,
*GET, ALL_N, PARM, ALL_NODES, DIM, 1
D, NODES(I), TEMP, T_INIT
```

```

*ENDDO
*DO, I, 1, N_CONSTR
D, CONSTRAINED_NODES(I), TEMP, T_MAX
*ENDDO
/SOLU
ANTYPE, 0
DELTIM, 1
TIME, 1
SOLVE

```

6) Инициализация векторов тепловых потоков

```

/POST1
*VGET, HEAT_FLUX_ANSYS0, NODE, 1, TF, SUM
!HEAT_FLUX_ANSYS0 – стандартный вектор теплового потока в
текущий момент времени (на основе классического закона Фурье)
*DIM, HEAT_FLUX0, ARRAY, ALL_N !HEAT_FLUX0 -
релаксированный вектор теплового потока в текущий момент времени
*DIM, HEAT_FLUX_NEW, ARRAY, ALL_N !HEAT_FLUX_NEW -
вектор теплового потока в следующий момент времени

```

7) Системные операции: формирование таблицы значений температуры; создание «измерительной оси» для вывода температур по заданным начальной и конечной точкам траектории

```

PLNSOL, TEMP
/WAIT, 0.5
TIME_TO_END = END_TIME
*DIM, TEMP_TABLE, ARRAY, 100, 7
PATH, MY_PATH, 2, 30, 100
PPATH, 1, P1
PPATH, 2, P2
PDEF, , TEMP, , AVG
PAGET, PDATA, TABLE

```

```

*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, 1) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = 2

```

8) Реализация цикла интегрирования по временной переменной *DOWHILE, TIME_TO_END

8.1) Формирование правой части СЛАУ с использованием векторно-матричных операций модуля APDL - MATH

```

*INIT, RHS, CONST, 0.0
*AXPY, 1.0, 0, T0, TIME_STEP, 0, T_DOT
*MULT, C, , T_DOT, , C_T_DOT
*MULT, K_, , T0, , RHS
*AXPY, TAU1, 0, C_T_DOT, TIME_STEP, 0, RHS
*AXPY, TIME_STEP**2, 0, Q, 1.0, 0, RHS
*INIT, T_NEW, CONST, 0.0
*LSBAC, MY_SOLVER, RHS, T_NEW

```

8.2) Вычисление производной температуры по времени

```

*AXPY, 1/TIME_STEP, 0, T_NEW, -1/TIME_STEP, 0, T0 ! 6)
*VEC, T_DOT, D, COPY, T0! 7)
*VEC, T0, D, COPY, T_NEW! 8) !T0 <- T_NEW
*MULT, Nod2Bcs, TRAN, T_NEW, , T_NEW_CONV
TOTAL_TIME = TOTAL_TIME + TIME_STEP
TIME_TO_END = END_TIME - TOTAL_TIME
/PREP7
NSEL, ALL
DDELE, ALL, ALL
*DO, I, 1, N
J = MAPFORWARD(NODES(I))
NODAL_TEMP = T_NEW_CONV((J-1)*Q_NUMDOF + 1)

```

```

D, NODES(I), TEMP, NODAL_TEMP *ENDDO
*DO, I, 1, N_CONSTR
D, CONSTRAINED_NODES(I), TEMP, T_MAX *ENDDO
/SOLU
ANTYPE, 0
DELTIM, 1
TIME, 1
SOLVE
/POST1
*DEL, HEAT_FLUX_ANSYS,, NOPR
*VGET, HEAT_FLUX_ANSYS, NODE, 1, TF, SUM
*DO, I, 1, ALL_N
HEAT_FLUX_NEW(I) = (TAU1*HEAT_FLUX0(I) +
HEAT_FLUX_ANSYS(I)*TIME_STEP + TAU2*(HEAT_FLUX_ANSYS(I)-
HEAT_FLUX_ANSYS0(I)))/(TIME_STEP + TAU1)
HEAT_FLUX0(I) = HEAT_FLUX_NEW(I)
HEAT_FLUX_ANSYS0(I) = HEAT_FLUX_ANSYS(I)
DNSOL, ALL_NODES(I), TF, SUM, HEAT_FLUX_NEW(I) *ENDDO
PLNSOL, TEMP
PATH, MY_PATH, 2, 30, 100
PPATH, 1, P1
PPATH, 2, P2
PDEF, , TEMP, , AVG
*DEL, PDATA, , NOPR
PAGET, PDATA, TABLE
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.001, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1

```

8.3) Сохранение промежуточных результатов в различные моменты времени

```

/SHOW, PNG
/REPLO
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF

*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.01, THEN *DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO

COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF

*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.05, THEN !... И Т. Д.
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO

COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF

*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.1, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO

COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG

```



```

/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.5, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 1.0, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*ENDDO

```

8.4) Сохранение промежуточных результатов в виде таблицы значений в различные моменты времени

```
*MWRITE, TEMP_TABLE(1, 1), TEMP_DATA, DAT, , JIK (200F10.4)
```

Для удобства использования предложенного алгоритма было разработано расширения для Ansys Workbench 2022 R1, устанавливаемое с помощью стандартного менеджера расширений ANSYS ACT (Application Customization Toolkit).

Интерфейс модуля «ThermalRelax» в программной среде ANSYS представлен на рис. 5.2.

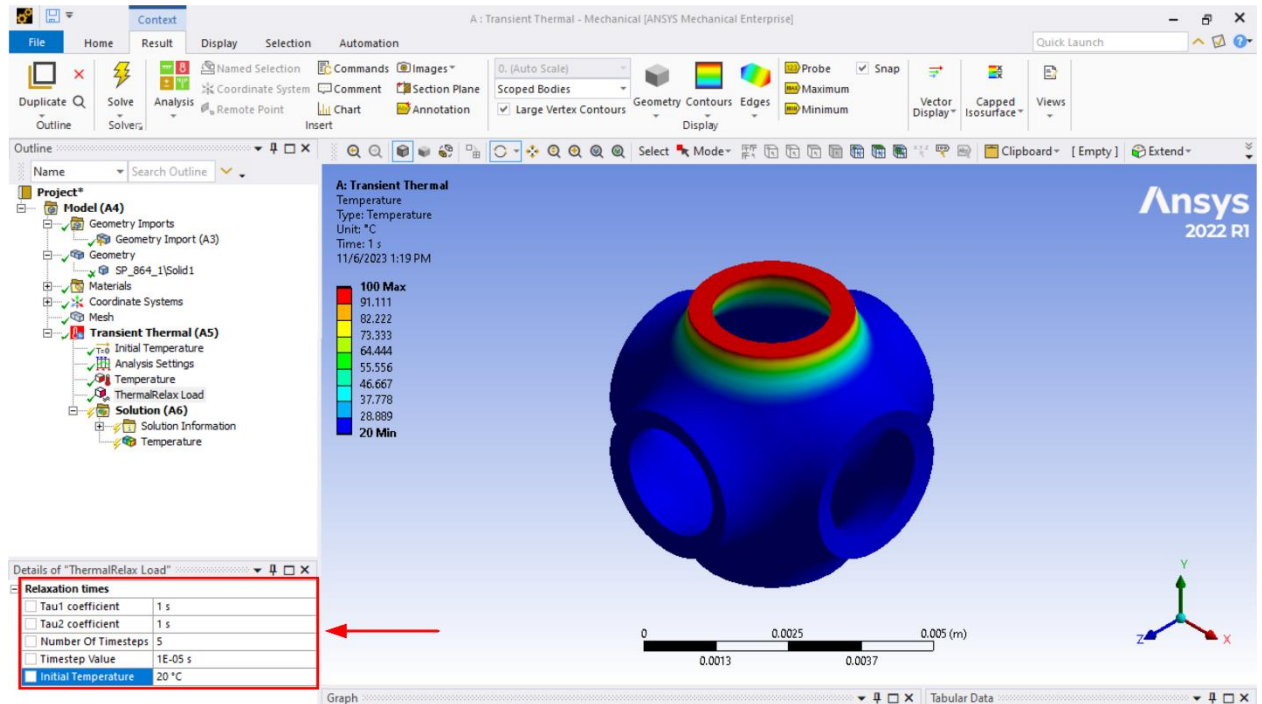


Рисунок 5.2. Интерфейс модуля «ThermalRelax»

5.2. Реализация алгоритма решения задачи теплопроводности методом коллокаций

В п. 2.3.1 диссертации выполнена постановка и решена задача теплопроводности в бесконечно длинной пористой пластине при граничных условиях третьего рода. Для решения данной задачи в диссертации применен метод, основанный на совместном применении метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок, а также методе коллокаций – прямом удовлетворение дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля в заданном наборе точек пространственной переменной.

Рассмотрим реализацию предложенного численно-аналитического метода в программной среде MathCAD 15.0.

Представим решение задачи в следующем виде

$$\Theta(\xi, Fo) := \varphi(Fo) \cdot \psi(\xi)$$

1) Функция $\varphi(Fo)$ имеет вид

$$\varphi(F_0) := A_k \cdot e^{(-\nu(k) \cdot F_0)}$$

2) Решение $\psi(\xi)$ отыскивается в виде

$$\psi(\xi) := B_0 + \sum_{i=1}^{KT+1} \left(B_i \cdot \xi^{i+1} \right) \rightarrow$$

3) Ввод количества точек, в которых необходимо удовлетворить дифференциальное уравнение

$$KT := 4$$

4) Присвоение дифференциального уравнения задачи Штурма-Лиувилля и граничных условий

$$EQ := \frac{d^2}{d\xi^2} \psi(\xi) + H \cdot \nu \cdot \psi(\xi) \rightarrow$$

$$GU1 := \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) \text{ substitute, } \xi = 0 \rightarrow$$

$$GU2 := \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) + B_i \cdot \psi(\xi) \text{ substitute, } \xi = 1 \rightarrow$$

$$GU3 := \psi(0) - 1 \rightarrow$$

$$H := 1.324503$$

5) Выполнение дифференциального уравнения в заданном наборе точек

$$V := \left\| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..KT \\ F_k \leftarrow EQ \left(k \cdot \frac{1}{KT+1} \right) \\ F \end{array} \right\|$$

6) Составление системы уравнений

Given

$$GU1 = 0$$

$$GU2 = 0$$

$$GU3 = 0$$

$$V = 0$$

7) Определение коэффициентов уравнения

$$\begin{pmatrix} B0 \\ B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \\ B5 \end{pmatrix} := \text{Find}(B0, B1, B2, B3, B4, B5) \rightarrow$$

8) Составление интеграла теплового баланса и определение значений собственных чисел

$$\text{ITB} := \int_0^1 \text{EQ}(\xi) \, d\xi \text{ solve, } \nu \rightarrow \begin{pmatrix} 434.96844420153927904 \\ 87.468817184198090912 \\ 32.216312626759945816 \\ 8.7727273757297769557 \\ 0.55883114827906525396 \end{pmatrix}$$

9) Составление невязки начального условия

$$\theta(\xi, F_0) := \sum_{k=0}^4 \Theta(\xi, F_0, k) \rightarrow$$

$$\text{NU}(k) := \int_0^1 (\theta(\xi, 0) - 1) \cdot \psi(\xi) \, d\xi \rightarrow$$

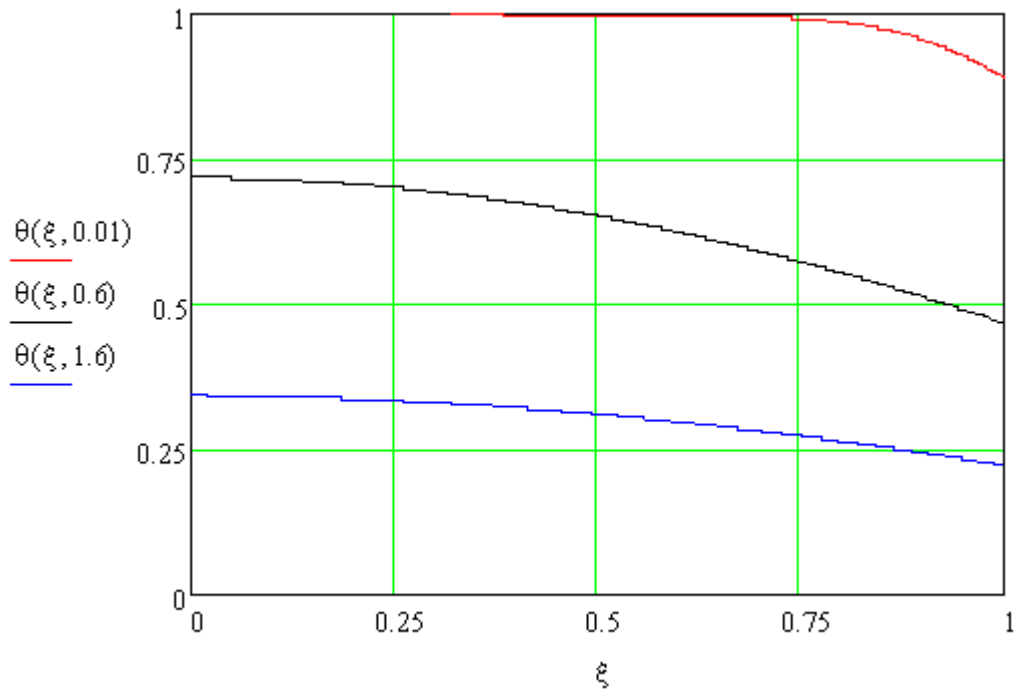
10) Определение коэффициентов A_k

Given

$$\text{NU1} = 0$$

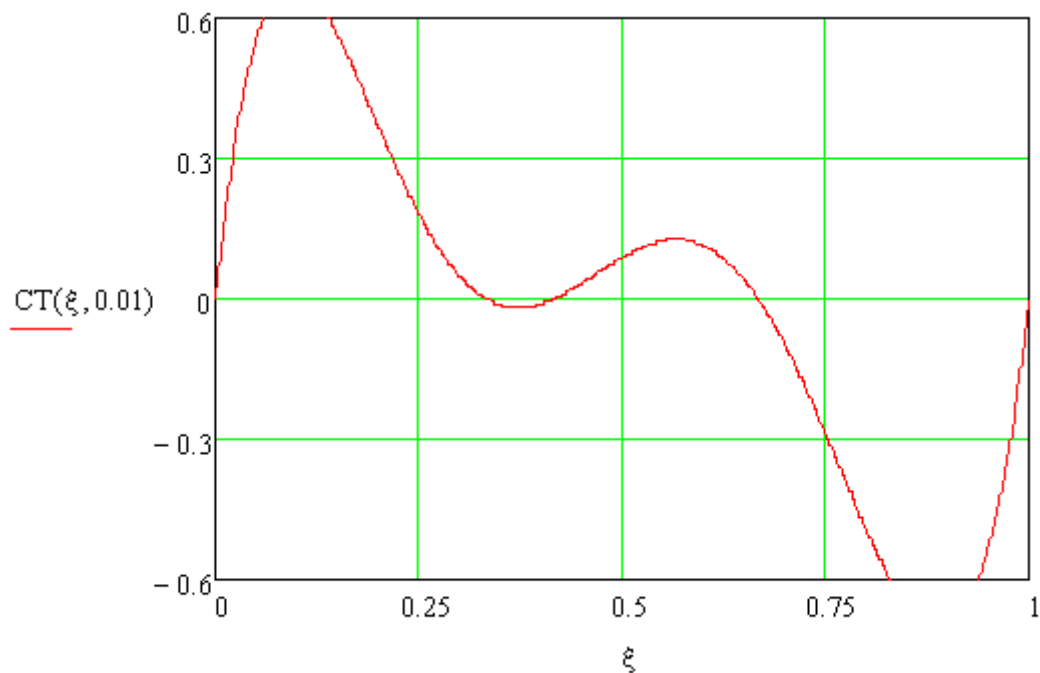
$$\begin{pmatrix} A0 \\ A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \end{pmatrix} := \text{Find}(A0, A1, A2, A3, A4) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.010142879056580229266 \\ -0.042089890537538188786 \\ 0.054192946996314614003 \\ -0.13752821158178769073 \\ 1.1201432404092950815 \end{pmatrix}$$

11) Графическое отображение результатов



12) Определение невязки дифференциального уравнения

$$CT(\xi, Fo) := H \left(\frac{d}{dFo} \theta(\xi, Fo) \right) - \frac{d^2}{d\xi^2} \theta(\xi, Fo)$$



5.3. Реализация алгоритма решения задачи теплопроводности методом введения дополнительной искомой функции

В диссертации для решения задачи теплопроводности в пористой бесконечно длинной пластине с равномерно распределенными внутренними

источниками тепла применен метод, основанный на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса. Рассмотрим реализацию данного метода в программной среде MathCAD 15.0.

Решение задачи отыскивается в виде

$$\Theta(\xi, F_0) := b_1 + b_2 \cdot \xi + b_3 \cdot \xi^2$$

1) Ввод основного дифференциального уравнения и краевых условий

$$EQ := H \cdot \left(\frac{d^1}{dF_0} \Theta(\xi, F_0) \right) - \left(\frac{d^2}{d\xi^2} \Theta(\xi, F_0) \right) - P_0$$

$$NU := \Theta(\xi, 0) \rightarrow$$

$$GU1 := \Theta(\xi, F_0) - 1 \text{ substitute, } \xi = 0 \rightarrow$$

$$GU2 := \frac{d}{d\xi} \Theta(\xi, F_0) \text{ substitute, } \xi = 1 \rightarrow$$

$$GU3 := \frac{d}{d\xi} \Theta(\xi, F_0) - q(F_0) \text{ substitute, } \xi = 0 \rightarrow$$

2) Составление системы уравнений и определение коэффициентов b_i

Given

$$GU1 = 0$$

$$GU2 = 0$$

$$GU3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(b_1, b_2, b_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ q(F_0) \\ \frac{q(F_0)}{2} \end{pmatrix}$$

3) Составление интеграла теплового баланса и определение функции $q(F_0)$

$$\Theta(\xi, F_0) \text{ collect, } q(F_0) \rightarrow \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \cdot q(F_0) + 1$$

$$\text{ITB} := \int_0^1 \text{EQ} \, d\xi \text{ collect, } \frac{d}{dFo} q(Fo) \rightarrow$$

$$q(Fo) := C1 \cdot e^{-\left(\frac{3 \cdot Fo}{H}\right)} + Po$$

$$\text{ITB} := \text{ITB} \text{ collect, } q(Fo) \rightarrow$$

4) Составление невязки начального условия и определения константы интегрирования

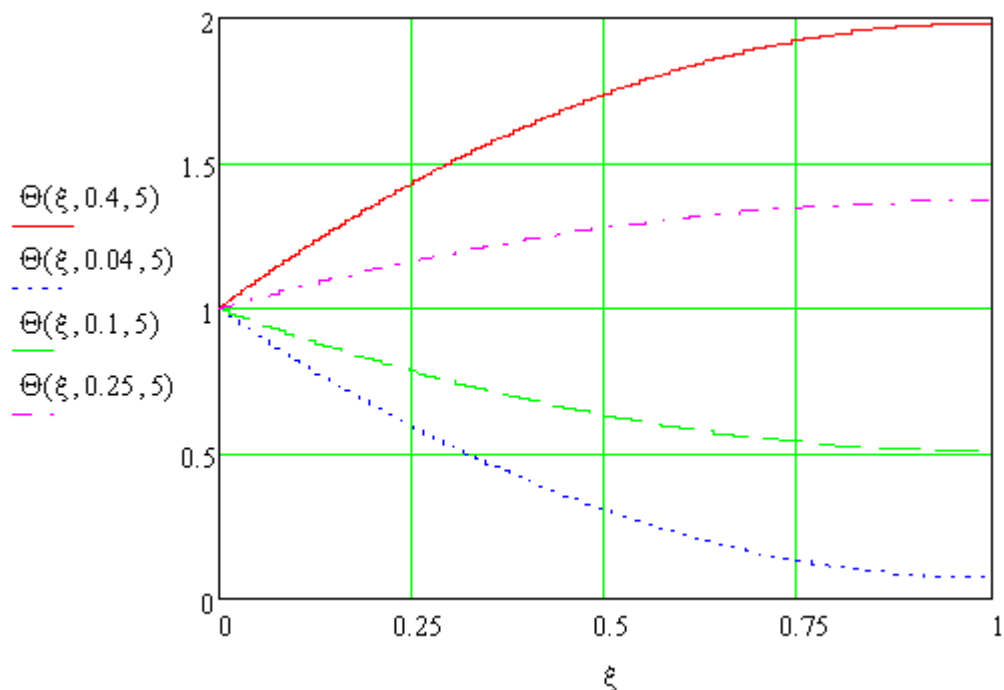
$$C1 := \left[\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cdot \left(\xi - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) d\xi \right] \text{ solve, } C1 \rightarrow -Po - \frac{5}{2}$$

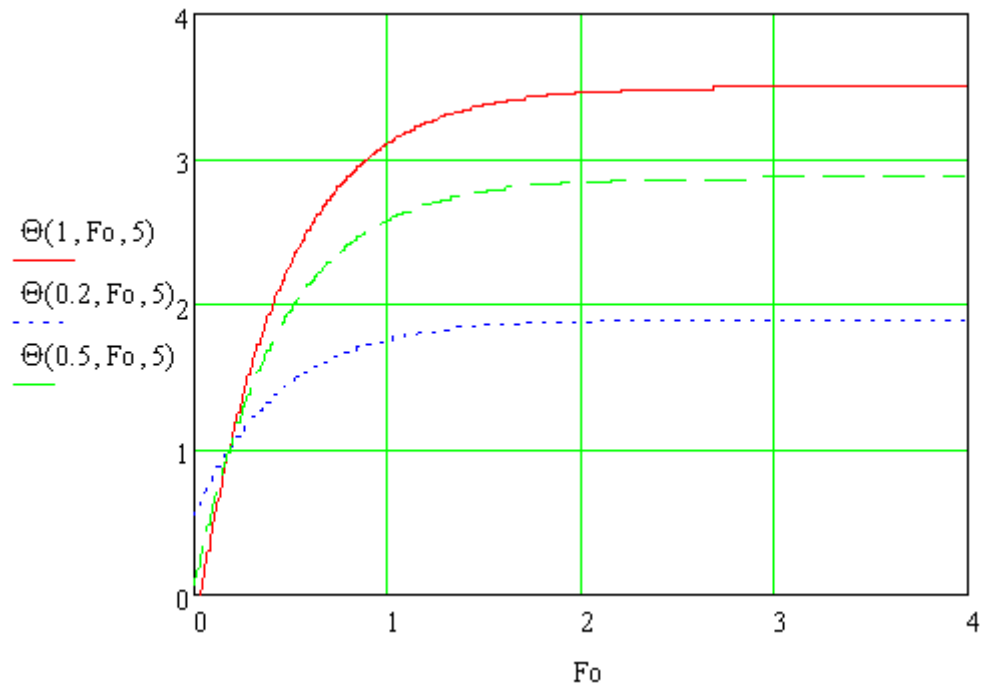
5) Переопределение искомой функции

$$\Theta(\xi, Fo, Po) := \Theta(\xi, Fo) \rightarrow \xi \cdot \left[Po - e^{-\frac{3 \cdot Fo}{H}} \cdot \left(Po + \frac{5}{2} \right) \right] - \frac{\xi^2 \cdot \left[Po - e^{-\frac{3 \cdot Fo}{H}} \cdot \left(Po + \frac{5}{2} \right) \right]}{2} + 1$$

$$H := 1.3245$$

6) Графическое отображение результатов





ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан новый метод математического моделирования процессов тепломассопереноса в пористых средах с топологией трижды периодических минимальных поверхностей. На основе интерпретации вычислительных и натуральных экспериментов определены коэффициенты переноса, которые зависят от характерных параметров пористой среды (размер элементарной ячейки, толщина стенки, тип ТППП).

2. Разработана новая математическая модель теплопроводности в пористых материалах со структурой, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях, позволяющая учитывать конфигурацию (пористость, толщина стенки, размер элементарной ячейки, тип ТППП) и свойства исходного материала при определении температурных полей и тепловых потоков в пористых средах.

3. При помощи предложенного численно-аналитического метода, основанного на совместном использовании методов разделения переменных, коллокаций и ортогонального метода взвешенных невязок, решена задача теплопроводности в пористой бесконечно протяженной ТППП-пластине при граничных условиях третьего рода. Полученное решение в диапазоне чисел отличается от численного решения не более чем на 1% (по норме Чебышева) уже в четвертом приближении.

4. Получено решение задачи теплопроводности в бесконечно протяженной пористой ТППП-пластине с равномерно распределенным внутренним источником теплоты при помощи приближенного аналитического метода, основанного на совместном применении метода введения дополнительной искомой функции и интегрального метода теплового баланса, особенность которого заключается во введении новой искомой функции, которая представляет собой плотность теплового потока в точке приложения граничного условия.

5. Разработаны новые алгоритмы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, реализующих примененные в диссертации численно-аналитический и приближенно-аналитический методы, для решения поставленных краевых задач теплопроводности в пористых ТПМП-материалах.

6. Разработан новый алгоритм реализации метода конечных элементов, основанный на использовании новой дискретной модели теплопроводности с учетом пространственно-временной нелокальности, при помощи которого впервые решена задача теплопроводности в элементарной ячейке ТПМП Шварца Р с учетом двухфазного запаздывания. Полученные результаты демонстрируют задержку изменения температуры в ячейке при учете релаксационных слагаемых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазов М. И., Домашнев И. А. Порошковая металлургия, №8, 1968.
2. Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Титов Д.М. Параметрическая идентификация математической модели теплопереноса в материалах углерод-углерод (С-С) для авиационных конструкций //Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2016. – №. 4. – С. 97-101.
3. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. Издание: Недра, Москва, 1972 г., 288 с.
4. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
5. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений. Т. 3. – М. – Л.: Гослитиздат, 1949. – 700 с.
6. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 328 с.
7. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 244 с.
8. Лейбензон Л.С. Собрание трудов: в 2 т. – М.: АН СССР, 1953. – Т. 2: Подземная гидрогазодинамика, – 544 с.
9. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – 1967.
10. Макарова В. В. и др. К вопросу о возможности радикального повышения теплопроводности сред введением дисперсных частиц (обзор) //Журнал прикладной химии. – 2020. – Т. 93. – №. 12. – С. 1696-1715.
11. Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Ковалев А. Г. Физика нефтяного и газового пласта. – М.: Недра, 1992. – 270 с.
12. Павловский Н. Н. Гидравлический справочник. - М. ; Л., ОНТИ, 1937. – 890 с.

13. Павловский Н. Н. О фильтрации воды через земляные плотины. - Л. : Изд. Всесоюз. акад. сельско-хоз. наук. - 259 с. : ил.
14. Просунцов П. В., Будник С. А., Ненарокомов А. В., Титов, Д. М. Идентификация математических моделей термоупругости. 2. Алгоритм и вычислительный эксперимент //Тепловые процессы в технике. – 2017. – Т. 9. – №. 10. – С. 456-462.
15. Черемской П. Г. Методы исследования пористости твердых тел/Под ред //ЛС Палатника. М.: Энергоатомиздат. 1985, 112 с. – 1985.
16. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.–736 с.
17. Щелкачев В.Н. Основы подземной нефтяной гидравлики. – М.: Гостоптехиздат, 1945.
18. Abueidda D. W. et al. Mechanical properties of 3D printed polymeric Gyroid cellular structures: Experimental and finite element study //Materials & Design. – 2019. – Т. 165. – С. 107597.
19. Abueidda D. W. et al. Mechanical properties of 3D printed polymeric cellular materials with triply periodic minimal surface architectures //Materials & Design. – 2017. – Т. 122. – С. 255-267.
20. Ahmed N., Sunada D. K. Nonlinear flow in porous media //Journal of the Hydraulics Division. – 1969. – Т. 95. – №. 6. – С. 1847-1858.
21. Aichlmayr H. T., Kulacki F. A. The effective thermal conductivity of saturated porous media //Advances in heat transfer. – 2006. – Т. 39. – С. 377-460.
22. Al-Ketan O. et al. Additive manufacturing of architected catalytic ceramic substrates based on triply periodic minimal surfaces //Journal of the American Ceramic Society. – 2019. – Т. 102. – №. 10. – С. 6176-6193.
23. Al-Ketan O., Abu Al-Rub R. K. Multifunctional mechanical metamaterials based on triply periodic minimal surface lattices //Advanced Engineering Materials. – 2019. – Т. 21. – №. 10. – С. 1900524.

24. Al-Ketan O., Rowshan R., Al-Rub R. K. A. Topology-mechanical property relationship of 3D printed strut, skeletal, and sheet based periodic metallic cellular materials //Additive Manufacturing. – 2018. – T. 19. – C. 167-183.
25. Ashby M. F. The properties of foams and lattices //Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2006. – T. 364. – №. 1838. – C. 15-30.
26. Ataee A. et al. Ultrahigh-strength titanium gyroid scaffolds manufactured by selective laser melting (SLM) for bone implant applications //Acta Materialia. – 2018. – T. 158. – C. 354-368.
27. Blatov V. A., Shevchenko A. P., Proserpio D. M. Applied topological analysis of crystal structures with the program package ToposPro //Crystal Growth & Design. – 2014. – T. 14. – №. 7. – C. 3576-3586.
28. Brakke K. A. The surface evolver //Experimental mathematics. – 1992. – T. 1. – №. 2. – C. 141-165.
29. Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles //Flow, Turbulence and Combustion. – 1949. – T. 1. – №. 1. – C. 27-34.
30. Brinkman H. C. On the permeability of media consisting of closely packed porous particles //Flow, Turbulence and Combustion. – 1949. – T. 1. – №. 1. – C. 81-86.
31. Brinkman H. C. The viscosity of concentrated suspensions and solutions //The Journal of chemical physics. – 1952. – T. 20. – №. 4. – C. 571-571.
32. Burke S. P., Plummer W. B. Gas flow through packed columns //Industrial & Engineering Chemistry. – 1928. – T. 20. – №. 11. – C. 1196-1200.
33. Carman P. C. The Determination of the Specific Surface Area of Powders I //J. Soc. Chem. Ind. – 1937. – T. 57. – C. 225-234.
34. Carman P.C. Flow of Gases through Porous Media. Academic Press Inc., New York, 1956. – 182 p.

35. Catchpole-Smith S. et al. Thermal conductivity of TPMS lattice structures manufactured via laser powder bed fusion //Additive Manufacturing. – 2019. – T. 30. – C. 100846.
36. Cheng C. F. et al. Nanoporous gyroid Ni/NiO/C nanocomposites from block copolymer templates with high capacity and stability for lithium storage //Journal of Materials Chemistry A. – 2018. – T. 6. – №. 28. – C. 13676-13684.
37. Cheng Z., Xu R., Jiang P. X. Morphology, flow and heat transfer in triply periodic minimal surface based porous structures //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2021. – T. 170. – C. 120902.
38. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau. – Victor dalmont, 1856. – T. 1.
39. Davoodi E. et al. Additively manufactured gradient porous Ti–6Al–4V hip replacement implants embedded with cell-laden gelatin methacryloyl hydrogels //ACS Applied Materials & Interfaces. – 2021. – T. 13. – №. 19. – C. 22110-22123.
40. Dubinin M. M. Surface and porosity of adsorbents //Russian Chemical Reviews. – 1982. – T. 51. – №. 7. – C. 605.
41. Elmadih W. et al. Mechanical vibration bandgaps in surface-based lattices //Additive Manufacturing. – 2019. – T. 25. – C. 421-429.
42. Ergun S. Fluid flow through packed columns //Chemical engineering progress. – 1952. – T. 48. – №. 2. – C. 89.
43. Feng Y. et al. Enhanced electromagnetic microwave absorption of SiOC ceramics targeting the integration of structure and function //Journal of the European Ceramic Society. – 2021. – T. 41. – №. 13. – C. 6393-6405.
44. Forchheimer Ph. Hydraulics. Leipzig–Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1914.
45. Givler R. C., Altobelli S. A. A determination of the effective viscosity for the Brinkman–Forchheimer flow model //Journal of Fluid Mechanics. – 1994. – T. 258. – C. 355-370.

46. Hamilton R. L., Crosser O. K. Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems //Industrial & Engineering chemistry fundamentals. – 1962. – T. 1. – №. 3. – C. 187-191.
47. Han L., Che S. An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems //Advanced Materials. – 2018. – T. 30. – №. 17. – C. 1705708.
48. Hsieh M. T., Begley M. R., Valdevit L. Architected implant designs for long bones: Advantages of minimal surface-based topologies //Materials & Design. – 2021. – T. 207. – C. 109838.
49. Jambhekar V. A. Forchheimer porous-media flow models-numerical investigation and comparison with experimental data //Published Master Thesis. Stuttgart: Universität Stuttgart-Institut für Wasserund Umweltsystemmodellierung. – 2011.
50. Kelly A. Why engineer porous materials? //Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2006. – T. 364. – №. 1838. – C. 5-14.
51. Kim J., Yoo D. J. 3D printed compact heat exchangers with mathematically defined core structures //Journal of Computational Design and Engineering. – 2020. – T. 7. – №. 4. – C. 527-550.
52. Kodikara J. et al. Changes in clay structure and behaviour due to wetting and drying //Proceedings 8th Australia New Zealand conference on geomechanics: consolidating knowledge. – Australian Geomechanics Society, 1999. – T. 179.
53. Koponen A., Kataja M., Timonen J. V. Tortuous flow in porous media //Physical Review E. – 1996. – T. 54. – №. 1. – C. 406.
54. Kozeny J. Ueber kapillare leitung des wassers im boden //Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. – 1927. – T. 136. – C. 271.
55. Lai M. et al. Profiting from nature: macroporous copper with superior mechanical properties //Chemical communications. – 2007. – №. 34. – C. 3547-3549.

56. Lee D. W., Khan K. A., Al-Rub R. K. A. Stiffness and yield strength of architected foams based on the Schwarz Primitive triply periodic minimal surface //International Journal of Plasticity. – 2017. – T. 95. – C. 1-20.
57. Li W. et al. 3D-printed CuNi alloy catalyst with triply periodic minimal surface for reverse water-gas shift reaction //Journal of Materials Chemistry A. – 2023.
58. Martys N., Bentz D. P., Garboczi E. J. Computer simulation study of the effective viscosity in Brinkman's equation //Physics of Fluids. – 1994. – T. 6. – №. 4. – C. 1434-1439.
59. Matsen M. W., Bates F. S. Unifying weak-and strong-segregation block copolymer theories //Macromolecules. – 1996. – T. 29. – №. 4. – C. 1091-1098.
60. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. V. 1. Clarendon Press, Oxford, U.K., 1881. P. 37–39.
61. Michielsen K., Stavenga D. G. Gyroid cuticular structures in butterfly wing scales: biological photonic crystals //Journal of The Royal Society Interface. – 2008. – T. 5. – №. 18. – C. 85-94.
62. Oh S. H. et al. Functional morphology change of TPMS structures for design and additive manufacturing of compact heat exchangers //Additive Manufacturing. – 2023. – T. 76. – C. 103778.
63. Peng H., Gao F., Hu W. Design, modeling and characterization on triply periodic minimal surface heat exchangers with additive manufacturing //2019 International Solid Freeform Fabrication Symposium. – University of Texas at Austin, 2019.
64. Philip J. R. Flow in porous media //Annual Review of Fluid Mechanics. – 1970. – T. 2. – №. 1. – C. 177-204.
65. Plummer H. C. On the problem of distribution in globular star clusters //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 71, p. 460-470. – 1911. – T. 71. – C. 460-470.

66. Pouya C. et al. Characterization of a mechanically tunable gyroid photonic crystal inspired by the butterfly parides sesostris //Advanced Optical Materials. – 2015.
67. Progelhof R. C., Throne J. L., Ruetsch R. R. Methods for predicting the thermal conductivity of composite systems: a review //Polymer Engineering & Science. – 1976. – T. 16. – №. 9. – C. 615-625.
68. Qureshi Z. A. et al. Using triply periodic minimal surfaces (TPMS)-based metal foams structures as skeleton for metal-foam-PCM composites for thermal energy storage and energy management applications //International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2021. – T. 124. – C. 105265.
69. Reynolds B. W. et al. Characterisation of heat transfer within 3D printed TPMS heat exchangers //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2023. – T. 212. – C. 124264.
70. Rhee S. K. Porosity—Thermal conductivity correlations for ceramic materials //Materials Science and Engineering. – 1975. – T. 20. – C. 89-93.
71. Rouquerol J. et al. Recommendations for the characterization of porous solids (Technical Report) //Pure and applied chemistry. – 1994. – T. 66. – №. 8. – C. 1739-1758.
72. Scheidegger A. E. The physics of flow through porous media. – University of Toronto press, 1957.
73. Schoen A. H. Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections. – 1970. – №. C-98.
74. Sreedhar N. et al. 3D printed feed spacers based on triply periodic minimal surfaces for flux enhancement and biofouling mitigation in RO and UF //Desalination. – 2018. – T. 425. – C. 12-21.
75. Starov V. M., Zhdanov V. G. Effective viscosity and permeability of porous media //Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. – 2001. – T. 192. – №. 1-3. – C. 363-375.

76. Torquato S. Thermal conductivity of disordered heterogeneous media from the microstructure //Reviews in Chemical Engineering. – 1987. – T. 4. – №. 3-4. – C. 151-204.
77. von Bruggeman D. A. G. Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und leitfähigkeiten der mischkörper aus isotropen substanzen // Ann. Phys. (Berlin). 1935. V. 416. N 7. P. 636–664.
78. Wang Z. et al. Mechanical behavior and deformation mechanism of triply periodic minimal surface sheet under compressive loading //Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2021. – T. 28. – №. 19. – C. 2057-2069.
79. Whitaker S. Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law //Transport in porous media. – 1986. – T. 1. – C. 3-25.
80. Wu L., Zhang W., Zhang D. Engineering gyroid-structured functional materials via templates discovered in nature and in the lab //Small. – 2015. – T. 11. – №. 38. – C. 5004-5022.
81. Yang C. et al. Preparation and thermal insulation properties of TPMS 3Y-TZP ceramics using DLP 3D printing technology //Journal of Materials Science. – 2023. – T. 58. – №. 29. – C. 11992-12007.
82. Yang L. et al. Mechanical response of a triply periodic minimal surface cellular structures manufactured by selective laser melting //International Journal of Mechanical Sciences. – 2018. – T. 148. – C. 149-157.
83. Yang S., Tang Y., Zhao Y. F. A new part consolidation method to embrace the design freedom of additive manufacturing //Journal of Manufacturing Processes. – 2015. – T. 20. – C. 444-449.
84. Yang W. et al. Acoustic absorptions of multifunctional polymeric cellular structures based on triply periodic minimal surfaces fabricated by stereolithography //Virtual and Physical Prototyping. – 2020. – T. 15. – №. 2. – C. 242-249.

85. Yeranee K., Rao Y. A review of recent investigations on flow and heat transfer enhancement in cooling channels embedded with triply periodic minimal surfaces (TPMS) //Energies. – 2022. – Т. 15. – №. 23. – С. 8994.

86. Zdravkov B. et al. Pore classification in the characterization of porous materials: A perspective //Open Chemistry. – 2007. – Т. 5. – №. 2. – С. 385-395.

87. Zhang L. et al. Energy absorption characteristics of metallic triply periodic minimal surface sheet structures under compressive loading //Additive Manufacturing. – 2018. – Т. 23. – С. 505-515.

Основные публикации автора диссертационной работы

88. Брагин Д. М., Еремин А. В., Попов А. И., Шульга А. С. Метод определения коэффициента эффективной теплопроводности пористого материала на основе минимальной поверхности типа Schoen's I-WP(r) //Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2023. – №. 2. – С. 61-68.

89. Брагин Д.М., Попов А.И., Зинина С.А., Олатуйи О.Д., Еремин А.В. Векторное распределение скорости в элементарной ячейке поверхности Шена I-WP // Уральский научный вестник, 2022. – Т. 3. – №. 1. – С. 66-72.

90. Еремин А.В., Попов А.И., Губарева К.В. Теплообмен в плоском канале при стабилизированном ламинарном течении жидкости // Перспективы науки. – 2019. – №8 (119). – С. 62–68.

91. Зинина С.А., Попов А.И., Еремин А.В. Численное решение нелинейной задачи теплопроводности в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2024. – №1. – С. 1-14.

92. Зинина С. А., Попов А. И., Брагин Д. М. Численное исследование процесса теплопереноса в плоской стенке с внутренними источниками теплоты при граничных условиях первого рода //Инженерный вестник Дона. – 2022. – №. 3 (87). – С. 200-208.

93. Зинина С. А., Попов А. И., Брагин Д. М., Еремин А. В. Исследование процесса теплопереноса в тепловыделяющем элементе цилиндрической формы //Инженерный вестник Дона. – 2021. – №. 8 (80). – С. 210-219.

94. Зинина С.А., Попов А.И., Брагин Д.М., Еремин А.В. Исследование температурного состояния плоского тепловыделяющего элемента с внутренним тепловыделением // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности, 2022. Т. 7. № 3(25) ч. 1. С. 4-10.

95. Зинина С.А., Попов А.И., Губарева К.В., Чуянов Д.О. Исследование нелинейной задачи теплопроводности в пластине с равномерно распределенными источниками теплоты // Уральский научный вестник, 2020. Vol. 5. №12. С. 67-73.

96. Мустафин Р.М., Попов А.И., Брагин Д.М. Численное исследование аэродинамических свойств трижды периодической минимальной поверхности Неовиуса // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности, 2023. – Т. 8. – № 11(37). – С. 32-39.

97. Попов А. И. Разработка тепловой изоляции с упорядоченной структурой, основанной на ТПМП Неовиуса //Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2022. – №. 6. – С. 58-68.

98. Попов А.И., Брагин Д.М., Зинина С.А., Еремин А.В. Определение теплопроводности материала с упорядоченной структурой, основанной на трижды периодической минимальной поверхности Шварца Р, с учётом конвекции // Вестник ДонНУ. Серия Г: Технические науки. – 2023. – № 3. С. 39-45.

99. Попов А.И., Брагин Д.М., Зинина С.А., Еремин А.В. Распределение векторного поля скорости с внешней стороны элементарной ячейки поверхности Шварца типа Р // Проблемы научной мысли, 2021. Vol. 1. № 9. С. 71-77.

100. Попов А.И., Брагин Д.М., Зинина С.А., Еремин А.В. Теплопроводность пористого материала с упорядоченной структурой,

основанной на трижды периодической минимальной поверхности Шварца Р, с учетом теплопроводности воздуха // Theoretical & Applied Science, 2023. Vol. 120. Issue 4. С. 301-307.

101. Попов А.И., Брагин Д.М., Зинина С.А., Еремин А.В. Исследование влияния методов генерации трижды периодических минимальных поверхностей на их теплофизические свойства // Математический вестник ВятГУ, 2023. № 2 (29). С. 4-10.

102. Попов А.И., Брагин Д.М., Зинина С.А., Еремин А.В., Олатуйи О.Д. Определение эффективного коэффициента теплопроводности пористого материала с упорядоченной структурой, основанной на ТПМП I-WP // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности, 2022. Т. 7. № 3(25) ч. 1. С. 61-67.

103. Попов А.И., Брагин Д.М., Кечин Н.Н., Еремин А.В. Исследование тепломассопереноса в канале с TPMS оребрением // Theoretical & Applied Science, 2023. Vol. 127. Issue 11. С. 406-410.

104. Попов А.И., Еремин А.В., Кечин Н.Н. Исследование тепломассопереноса в канале с оребрением на основе трижды периодической минимальной поверхности // Градостроительство и архитектура. – 2023. – Т. 13. – № 4. – С. 49-56.

105. Eremin A.V., Frolov M.A., Krutov A.F., Smolkov M.I., Shulga A.S., Bragin D. M., Popov A.I., Blatov V.A. Mechanical properties of porous materials based on new triply periodic and minimal surfaces //Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2024. – С. 1-17.

106. Eremin A.V., Kishov E.A., Popov A.I. Discrete heat transfer model with space–time nonlocality //International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2022. – Т. 138. – С. 106346.

107. Popov A.I., Bragin D.M., Eremin A.V. Effective Thermal Conductivity of Structured Porous Medium: Numerical Study //Defect and Diffusion Forum. – Trans Tech Publications Ltd, 2022. – Т. 419. – С. 69-76.

108. Popov A.I., Eremin A.V., Bragin D.M. Modeling and Measurement of Effective Thermal Conductivity of Materials Reinforced with Bars //International Journal of Thermophysics. – 2023. – T. 44. – №. 2. – C. 17.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Приближенно-аналитический метод решения задачи теплопроводности
в пористой пластине, структура которой основана на трижды
периодических поверхностях минимальной энергии»**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023684550

Приближенно-аналитический метод решения задачи теплопроводности в пористой пластине, структура которой основана на трижды периодических поверхностях минимальной энергии

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет" (RU)*

Авторы: *Зинина Софья Алексеевна (RU), Попов Андрей Игоревич (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Брагин Дмитрий Михайлович (RU), Мустафин Равиль Мансурович (RU), Кечин Никита Николаевич (RU)*

Заявка № 2023683893

Дата поступления 13 ноября 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 16 ноября 2023 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов
Ю.С. Зубов Юрий Сергеевич
И.О. Зубов Ю.С. Зубов

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Определение коэффициента эффективной теплопроводности пористых
материалов с упорядоченной структурой на основе экспериментальных
данных»**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023616948

Определение коэффициента эффективной теплопроводности пористых материалов с упорядоченной структурой на основе экспериментальных данных

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет" (RU)*

Авторы: *Попов Андрей Игоревич (RU), Брагин Дмитрий Михайлович (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Зинина Софья Алексеевна (RU), Олатуйи Олувапелуми Джонсон (NG), Мустафин Равиль Мансурович (RU), Карпилов Игорь Дмитриевич (RU)*

Заявка № 2023615531

Дата поступления 27 марта 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 04 апреля 2023 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Приближенно-аналитический метод решения задачи теплопроводности
в цилиндре с внутренними источниками теплоты»**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022665882

**Приближенно-аналитический метод решения задачи
теплопроводности в цилиндре с внутренними
источниками теплоты**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования "Самарский
государственный технический университет" (RU)*

Авторы: *Зинина Софья Алексеевна (RU), Попов Андрей Игоревич
(RU), Брагин Дмитрий Михайлович (RU), Еремин Антон
Владимирович (RU), Олатуйи Олувапелуми Джонсон (NG)*

Заявка № 2022664709

Дата поступления 08 августа 2022 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 23 августа 2022 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение
"Федеральная служба по интеллектуальной собственности"
125009, Москва, ул. Вавилова, д. 19

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Программа для реализации алгоритма решения задачи
теплопроводности в стержне с учетом релаксационных явлений»**

43/
21

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021669994

«Программа для реализации алгоритма решения задачи теплопроводности в стержне с учетом релаксационных явлений»

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *Попов Андрей Игоревич (RU), Зинина Софья Алексеевна (RU), Брагин Дмитрий Михайлович (RU), Губарева Кристина Владимировна (RU), Шульга Александр Сергеевич (RU), Чуянов Дмитрий Олегович (RU), Еремин Антон Владимирович (RU)*

Заявка № **2021666730**

Дата поступления **21 октября 2021 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **06 декабря 2021 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ 5.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Численное решение задачи локально-неравновесного теплообмена в
плоской стенке при граничных условиях первого рода»**

42
21

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021667495

Численное решение задачи локально-неравновесного теплообмена в плоской стенке при граничных условиях первого рода

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет" (ФГБОУ ВО "СамГТУ") (RU)*

Авторы: *Попов Андрей Игоревич (RU), Зинина Софья Алексеевна (RU), Брагин Дмитрий Михайлович (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Губарева Кристина Владимировна (RU), Шульга Александр Сергеевич (RU), Чуянов Дмитрий Олегович (RU)*



Заявка № 2021666691

Дата поступления 21 октября 2021 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 29 октября 2021 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Программный модуль ANSYS ThermalRelax»**

54
/ 20

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2021612335

Программный модуль ANSYS "ThermalRelax"

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет" (RU)*

Авторы: *Еремин Антон Владимирович (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Кишов Евгений Алексеевич (RU), Жуков Виталий Владимирович (RU), Кудинов Василий Александрович (RU), Стефанюк Екатерина Васильевна (RU), Попов Андрей Игоревич (RU), Трубицын Константин Викторович (RU)*

Заявка № **2020667064**

Дата поступления **21 декабря 2020 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **16 февраля 2021 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ 7.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Теплообмен в плоскопараллельном канале при постоянных
теплофизических свойствах жидкости»**

56
/19

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020611222

**Теплообмен в плоскопараллельном канале при постоянных
теплофизических свойствах жидкости**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Самарский
государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *Еремин Антон Владимирович (RU), Попов Андрей Игоревич
(RU), Трубицын Константин Викторович (RU), Губарева Кристина
Владимировна (RU), Иглина Татьяна Вадимовна (RU), Иглин Павел
Викторович (RU)*

Заявка № 2020610138

Дата поступления 10 января 2020 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 27 января 2020 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ 8.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
«Теплопроводность в двухслойной пластине с учетом конечной скорости
распространения теплоты»**

54/
19

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020611224

Теплопроводность в двухслойной пластине с учетом конечной скорости распространения теплоты

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *Еремин Антон Владимирович (RU), Попов Андрей Игоревич (RU), Трубицын Константин Викторович (RU), Губарева Кристина Владимировна (RU), Иглина Татьяна Вадимовна (RU), Иглин Павел Викторович (RU), Шульга Александр Сергеевич (RU)*

Заявка № 2020610142

Дата поступления 10 января 2020 г.

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 27 января 2020 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ 9.

**Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы в
расчетную практику ООО «ТСК Волгаэнергопром»**

УТВЕРЖДАЮ
Исполняющий обязанности
главного инженера
ООО «ТСК Волгаэнергопром»
Гаврушев Е.А.
«14» 03 2024 г.

АКТ

**о внедрении результатов диссертационной работы
Попова Андрея Игоревича
«Разработка методов математического моделирования процессов
тепломассопереноса в материалах с упорядоченной структурой»**

Комиссия в составе:

1. Исполняющий обязанности главного инженера ООО «ТСК Волгаэнергопром» Гаврушев Е.А.;
2. Ведущий инженер механик ООО «ТСК Волгаэнергопром» Артамонов М.В.

составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Попова А.И. на тему «Разработка методов математического моделирования процессов тепломассопереноса в материалах с упорядоченной структурой», а именно:

- методика расчета физических свойств пористых сред с упорядоченной структурой и конструкций на их основе;
- математическая модель теплопроводности в пористых средах на основе трижды периодических минимальных поверхностей;
- комплекс разработанных в диссертации проблемно-ориентированных программ для ЭВМ, предназначенных для решения задач теплопроводности в пористых средах

внедрены в расчетную практику ООО «ТСК Волгаэнергопром».

Ведущий инженер механик
ООО «ТСК Волгаэнергопром»

М.В. Артамонов

ПРИЛОЖЕНИЕ 10.

**Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы в
расчетную практику ООО «Инженерное бюро Пульсар»**

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
ООО «Инженерное бюро Пульсар»



Кадышев И.В.
«*Ирина*» 2024 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов диссертационной работы «Разработка методов математического моделирования процессов тепломассопереноса в материалах с упорядоченной макроструктурой» Попова Андрея Игоревича, представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Результаты диссертационной работы «Разработка методов математического моделирования процессов тепломассопереноса в материалах с упорядоченной макроструктурой» Попова Андрея Игоревича внедрены в расчетную практику компании и используются при определении теплопроводности, профилей температур и тепловых потерь в пористых материалах, при численном решении задач теплопроводности в пористых материалах на микро- и нано уровне, а также при определении профиля скорости фильтрационного течения и гидравлического сопротивления в пористых материалах.

Технический директор
ООО «Инженерное бюро Пульсар»

Д.О. Чьянов

ПРИЛОЖЕНИЕ 11.

**Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы в
учебный процесс**



УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
ФГБОУ ВО «Самарский государственный
технический университет», д.п.н.
О.В. Юсупова
«11» _____ 2024 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы
Попова Андрея Игоревича
«Разработка методов математического моделирования процессов
тепломассопереноса в материалах с упорядоченной макроструктурой»
в учебном процессе Самарского государственного технического
университета

Настоящий акт составлен о том, что в учебном процессе для студентов теплоэнергетического факультета направления подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» используются следующие результаты диссертационной работы Попова А.И. на тему «Разработка методов математического моделирования процессов теплопереноса в материалах с упорядоченной макроструктурой»:

1. Методика исследования процессов теплопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой с использованием оригинального способа вычислительной гомогенизации исследуемой области и определения коэффициентов переноса на основе интерпретации вычислительных экспериментов.
2. Комплекс программ, реализующих приближенные аналитические и численно-аналитические методы решения краевых задач теплопроводности.

Декан ТЭФ,
к.э.н., доцент

К.В. Трубицын