Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

Колотилкина Ксения Владимировна

Разработка численно – аналитических методов математического моделирования тепломассопереноса в реакторах термического разложения метана

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор,
Стефанюк Е. В.

Самара 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

Глава 1. Обзор работ по теме диссертации 11

Глава 2. Разработка численно – аналитических методов исследования теплообмена в реакторах пиролиза метана 21

2.1. Расчет температурного состояния стенки реактора пиролиза метана при несимметричных граничных условиях третьего рода 22

2.2. Нелинейные задачи теплопроводности с температурно-зависящими 31

2.3. Дополнительные функции и дополнительные условия на границе в 43

2.4. Получение точного аналитического решения линейной задачи 55

2.5. Моделирование температуры стенки реактора пиролиза метана при переменных во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре среды 63

Глава 3. Разработка методов математического моделирования тепловых процессов в реакторе пиролиза и газовой печи 81

3.1. Формирование динамического пограничного слоя в реакторе 81

3.2. Тепловой и динамический пограничные слои при переменной вязкости и температуропроводности газа 88

3.3. Расчет калориферов глубокого охлаждения газов, уходящих из печи реактора пиролиза метана 98

Глава 4. Разработка программных средств для численно – аналитического исследования теплообмена в реакторах пиролиза метана 106

4.1. Описание программных средств, реализующих численно – аналитические методы расчёта тепловых процессов в реакторах пиролиза метана 106

4.2. Программный комплекс для моделирования нестационарного 109

4.3. Реализация метода решения нелинейной задачи 117

4.4. Реализация программного комплекса для определения мощности внутреннего источника тепла 123

4.5. Реализация программного комплекса для расчёта теплообменной 127

Выводы 131

Список используемой литературы 133

Приложение А 150

Приложение Б 154

Приложение В 156

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Математическая моделирование гидродинамики и теплообмена в технических установках, в том числе и в реакторах пиролиза (термического разложения без доступа кислорода) метана, представляет важное направление современной науки. Термическое разложение метана на водород и углерод происходит при температурах от 700 до 1000℃, что приводит к необходимости учёта зависимости физических свойств от температуры. Краевые задачи в этом случае становятся нелинейными. Для их решения точные аналитические методы не могут быть использованы ввиду невозможности представления решений нелинейных краевых задач в форме бесконечных рядов. В связи с чем, возникает необходимость разработки приближенных аналитических методов их решения. Среди них особенно эффективными являются методы, основанные на определении дополнительных граничных условий (ДГУ) и дополнительных искомых функций (ДИФ). Их принципиальное отличие состоит в возможности сведения исходного дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному уравнению относительно дополнительной искомой функции. Дополнительные граничные условия обладают тем свойством, что их выполнение в одной из граничных точек эквивалентно выполнению в этой точке исходного дифференциального уравнения, что при большом числе приближений (эквивалентном применению большого числа дополнительных граничных условий) приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, не прибегая к непосредственному интегрированию по пространственной переменной. В известной литературе приводятся доказательства теорем, подтверждающих эффективность применения дополнительных граничных условий. Следует особо подчеркнуть, что использование ДИФ и ДГУ не искажает исходную математическую постановку задачи ввиду того, что они являются определяемыми (ДИФ) и выполняемыми (ДГУ) и при любом другом методе получения решения (включая и точные аналитические методы), в которых они не выделяются в качестве отдельного рассмотрения. Не изменяя исходной математической

постановки задач, ДИФ и ДГУ позволяют существенно упростить процесс получения аналитического решения и окончательное выражение для него. Применительно к линейным задачам этот метод приводит к решениям, совпадающим с точными аналитическими решениями, представленными в форме бесконечных рядов. Следует, однако отметить, что применительно к решению сложных нелинейных задач теплообмена и гидродинамики эти методы пока ещё недостаточно разработаны. В связи с чем, тему диссертации, посвященной разработке таких методов, следует признать актуальной.

Цель работы:

Разработка численно – аналитических методов моделирования линейных и нелинейных задач гидродинамики и теплообмена для установок термического разложения метана.

Задачи исследований

1. Разработка численно – аналитического метода исследования задачи теплопроводности в условиях третьей краевой задачи применительно к реактору термического разложения метана.
2. Разработка метода получения аналитических решений нелинейных задач теплопроводности с температурно-зависящим источником теплоты на основе определения ДИФ и ДГУ и его применение в расчетах теплообмена в реакторах пиролиза метана.
3. Получение точного решения краевой задачи теплопроводности с источником теплоты на основе определения дополнительной искомой функции и дополнительной граничной информации.
4. Разработка метода математического моделирования задачи формирования теплового пограничного слоя на стенках реактора пиролиза метана при переменной вязкости и температуропроводности газа.

Методы исследований. В работе использованы следующие методы исследований: метод коллокаций; интегральный метод теплового баланса; ортогональные методы Л. В. Канторовича и Бубнова – Галеркина.

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта научной

специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

2. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно – ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

3. Качественные или аналитические методы исследования математических моделей.

4. Комплексы исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Научная новизна

1. Разработан численно – аналитический метод решения задачи теплообмена в условиях третьей краевой задачи для определения температурного состояния стенки реактора пиролиза метана в нестационарных условиях пуска и останова, отличающийся малым числом членов ряда получаемых решений и их быстрой сходимостью по сравнению с классическими приближенными методами.

2. Разработан метод получения аналитических решений нелинейных задач теплопроводности с температурно-зависящим источником теплоты, позволяющий идентифицировать мощность источника теплоты в условиях индукционного нагрева путем решения обратной задачи.

3. Разработан метод получения численно – аналитических решений задач теплопроводности с источниками теплоты, позволяющий исключить непосредственное интегрирование дифференциального уравнения краевой задачи по пространственной переменной путем его выполнения в граничных точках и сведения задачи к решению обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ).

4. Разработана нелинейная математическая модель теплового пограничного слоя при переменных вязкости и температуропроводности газа для

моделирования пиролиза метана в газовом реакторе, позволяющая определить застойные зоны, приводящие к интенсивному отложению углерода на стенках реактора.

На защиту выносятся

1. Численно – аналитический метод решения задачи теплопроводности при несимметричных граничных условиях третьего рода, позволяющий получать быстро сходящиеся решения с малым числом членов ряда.

2. Метод решения нелинейных задач теплопроводности с температурно-зависящими источниками теплоты, позволяющий получать приближённое решение с малым числом членов ряда и выполнять идентификацию мощности источника теплоты в пределах заданной температуры стенки реактора при его индукционном нагреве посредством решения обратной задачи.

3. Метод получения численно – аналитического решения задачи теплопроводности с источником теплоты, позволяющий исключить непосредственное интегрирование исходного дифференциального уравнения по пространственной переменной за счет его выполнения в граничных точках.

4. Нелинейная математическая модель теплового пограничного слоя при переменных вязкости и температуропроводности применительно к анализу скорости и температуры в пограничной области реакционной зоны установки пиролиза метана.

5. Алгоритмы и комплексы программ, реализующих разработанные в диссертации методы решения краевых задач.

Достоверность результатов работы обеспечивается корректностью математической постановки рассматриваемых краевых задач, соответствием полученных решений основным физическим закономерностям процессов теплопроводности, теплообмена и формирования температурных полей, а также сопоставлением результатов с точными аналитическими решениями, полученными классическими методами, данными независимых источников и численными расчетами.

Для ряда частных случаев показано совпадение полученных решений с известными точными решениями, что подтверждает корректность разработанных численно – аналитических методов. Дополнительно выполнено сравнение расчетных данных с результатами численного моделирования, показавшее удовлетворительное согласование температурных полей и характерных параметров процесса.

Практические результаты работы, связанные с расчетом теплового состояния элементов установки пиролиза метана, определением параметров прогрева стенки реактора и глубоким охлаждением дымовых газов в калорифере, подтверждены экспериментальными исследованиями на установке пиролиза метана, изготовленной при участии соискателя.

Теоретическая и практическая ценность работы. Теоретическое значение полученных в диссертации результатов состоит в разработке и развитии нового направления получения точных и приближенных аналитических решений линейных и нелинейных краевых задач, основанного на определении дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций, позволяющих значительно упростить процесс получения решений и окончательных выражений для них, находить решение сложнейших нелинейных краевых задач. Используемый в диссертации метод обоснован доказательством соответствующей теоремы, согласно которой граничное выполнение исходного дифференциального уравнения краевой задачи приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, не прибегая к его непосредственному интегрированию по пространственной переменной. Использование метода коллокаций позволяет максимально арифметизировать процесс получения решений, сводя его к решению систем линейных алгебраических уравнений. При этом наиболее трудоёмкая часть получения решения выполняется на ЭВМ при сохранении аналитического вида получаемого решения.

Полученные в диссертации решения были использованы при расчётах температурного состояния стенки реактора пиролиза метана, позволившие определить скорость прогрева в нестационарных процессах пуска (останова) и

выдать рекомендации по её снижению с целью ограничения температурных градиентов, вызывающих напряжения, превышающие пределы прочности для данного материала. Применительно к задачам с внутренними источниками теплоты полученные решения позволили выполнить оценку их мощности с целью недопущения перегрева стенки реактора пиролиза метана при её индукционном нагреве. Полученные решения позволили определить особенности формирования пограничного слоя на внутренней поверхности стенки реактора пиролиза метана при переменных вязкости и температуропроводности газа. И, в частности показано, что в пристеночной области образуются застойные зоны с повышенной вязкостью и температуропроводностью, приводящие к образованию углеродных отложений на стенке, существенно сдерживающих прогрев метана, подлежащего пиролизу.

Связь работы с государственными программами научных исследований. Диссертация представляет обобщение исследований, выполненных автором по плану работ молодежной лаборатории «Нефтегазовые технологии производства водорода и графита» (проект № FSSE-2024–0014) в Самарском государственном техническом университете.

Внедрение результатов работы. Результаты работы внедрены в ООО «Газпромнефть – Промышленные инновации», а также в учебном процессе Самарского государственного технического университета.

Апробация работы. Результаты работы обсуждены на Всероссийской (с международным участием) молодёжной конференции «Бутаковские чтения», Томск, 2022, 2023, 2024, 2025 г.; X Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции молодых исследователей «Актуальные проблемы строительства, ЖКХ и техносферной безопасности», Волгоград, 2023, 2024 г.; Международной научно-технической конференции молодых ученых БГТУ им. В.Г. Шухова, посвященной 170-летию со дня рождения В.Г. Шухова, Белгород, 2023 г.; 8-ой Всероссийской научной конференции перспективных разработок молодых ученых «Молодежь и наука: шаг к успеху», Курск, 2025 г.; XXXVIII Международной научной конференции «Математические методы в

технике и технологиях – ММТТ-38», Самара, 2025 г.; Всероссийской конференции «XLI Сибирский теплофизический семинар», Новосибирск, 2025 г. .; XXXIX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-39», Самара, 2026 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 21 печатной работе, из них 2 статьи в журнале, включенном в базы данных Scopus и Web of Science, 7 статей – в журналах из перечня ВАК, 12 статей в других изданиях. Получено 2 патента на изобретения, зарегистрировано 4 программы для ЭВМ.

Личный вклад автора. В работах [135, 136, 138, 140–143] диссертанту принадлежит постановка проблем исследований, а также выполнение расчетной работы. В работах [129 – 134, 137, 139, 144–149], опубликованных в соавторстве, диссертанту в равной степени с другими авторами принадлежат постановки задач, получение решений и анализ результатов исследований.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Общий объём работы составляет 159 страниц; она включает 32 рисунка, 2 таблицы, 149 источников в списке литературы и 3 приложения.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSSE-2024–0014) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

Глава 1. Обзор работ по теме диссертации

Диссертация посвящена разработке численно – аналитических методов решения задач теплообмена и гидродинамики применительно к реакторам пиролиза метана. В связи с чем, сначала представим обзор работ по известным методам решения представленных в диссертации задач, а затем рассмотрим их использование применительно к реакторам пиролиза метана.

Методы исследования краевых задач подразделяются на численные, точные и приближенные аналитические. Численные – конечных разностей, конечных элементов. Недостаток – нет возможности представления решения формулой, описывающей искомую функцию в диапазоне пространственно – временных переменных, что не позволяет использовать полученные численными методами результаты для решения задач термоупругости, обратных задач, задач оптимизации [4, 5, 9, 13, 15, 24, 27, 42, 60 – 65, 69 – 72, 74, 76, 83, 86, 89 – 93, 96, 97, 108, 124,125, 127].

К точным относятся: разделения переменных; интегральных преобразований и др, используемые лишь для линейных задач, которые не отражают полностью реальные процессы, являющиеся нелинейными [29 – 31, 55, 60 – 65, 82, 96, 97, 102, 103, 107, 109 – 111, 126].

В приближенных методах решение принимается в виде ряда с конечным числом членов. Причем, их увеличение не всегда приводит к возрастанию точности, так как в этих методах собственные числа находятся из степенного полинома, решение которого затруднительно получить при большом числе приближений [1, 3, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 18, 23, 26, 31 – 33, 35, 44, 73, 100, 101, 104].

В приближенных методах уравнение и начальные условия выполняются из систем алгебраических уравнений, матрицы которых плохо обусловлены. Среди них известны методы: Ритца, Треффтца, Канторовича, Галеркина, теплового баланса, коллокаций [9, 18, 34, 36 – 47, 49 – 54, 57, 58, 67, 77, 80, 81, 85, 87, 88, 99, 100, 101, 102, 103]. Существенным их преимуществом является универсальность, связанная с тем, что они могут быть применены для решения сложных

нелинейных задачах с нелинейными граничными условиями; нелинейными источниками теплоты.

К приближенным аналитическим относятся также методы, в которых процесс разделяется на два этапа по времени. Для этого вводится фронт возмущения, разделяющий область на прогретую и не прогретую. Первый этап завершается при достижении фронтом возмущения противоположной стенки. На втором этапе определяется дополнительная функция, представляющая температуру в центре пластины [18, 38, 43, 44].

Проблема практически всех методов для моделирования термического слоя заключается в трудностях их использования при большом числе приближений. В диссертации для ее решения формулируются дополнительные условия, выполнение которых эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения на границах и на фронте температурного возмущения. В работах [52, 95] показано, что выполнение уравнения на границах при большом числе приближений приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, минуя процесс его непосредственного интегрирования по пространственной переменной. В работе [52] этот метод применен к получению точных решений линейных задач.

Исследования теплообмена в жидкостях и газах связаны с разработкой калориферов (и других теплообменных систем). Трудности решения таких задач объясняются их нелинейностью из-за наличия конвективных членов в дифференциальных уравнениях. Приближенные аналитические методы, связанные с определением дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций, позволяют преодолевать эти трудности.

Течение жидкостей и газов сопровождается возникновением на стенке динамического пограничного слоя. Течение среды в пограничном слое описывается сложными нелинейными дифференциальными уравнениями [53, 66, 84, 105]. При различных температурах стенки и среды возникает также и тепловой пограничный слой, толщина которого для газов практически равна толщине динамического слоя.

Теория пограничного слоя определяет одинаковый механизм переноса тепла и импульса в обоих слоях, благодаря чему устанавливается аналитическая зависимость сопротивления трения и теплоотдачи, позволяющая по известным коэффициентам трения определять коэффициенты теплоотдачи, что проще их определения из критериальных уравнений.

Получение аналитических решений краевых задач при несимметричных условиях третьего рода затрудняется необходимостью решения тригонометрических уравнений для собственных чисел, решения которых возможно лишь численными методами. Необходимость привлечения численных методов создаёт существенные неудобства в определении собственных чисел, а также приводит к сложным соотношениям для собственных функций, что затрудняет выполнение начального условия, из которого находятся постоянные интегрирования. Их нахождение связано с составлением невязки начального условия и выполнением условия ее ортогональности ко всем собственным функциям. В итоге определение постоянных интегрирования сводится к вычислению сложных интегралов по пространственной переменной, которые могут не иметь стандартных формул их определения. Таким образом, нахождение более простых методов определения собственных чисел и собственных функций является актуальной проблемой при решении третьей краевой задачи теплопроводности.

В работах [36–47, 50–54, 57, 58] представлено направление, связанное с интегральным методом, при учете дополнительных условий. Они находятся такого вида, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению уравнения в граничных точках. Выполнение уравнения на границах при большом числе приближений приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области. Следовательно, отпадает необходимость непосредственного интегрирования уравнения по пространственной переменной – достаточно ограничиться лишь выполнением интегрального уравнения, то есть осреднённого дифференциального уравнения. Этот метод в ряде случаев (применительно к линейным краевым задачам) позволяет получать точные

аналитические решения в форме бесконечных рядов, не прибегая к непосредственному интегрированию дифференциального уравнения.

Используемые при получении решений дополнительные функции характеризуют изменение температуры (или градиента температуры) во времени в одной конкретной точке области, включая и граничные точки, в том числе и точки задания граничного условия первого рода. Дополнительные функции сводят исходное уравнение в частных производных к временно́му обыкновенному дифференциальному уравнению, из решения которого находятся собственные числа. Из этого уравнения для собственных чисел получается степенной полином, что упрощает их нахождение по сравнению с классическими методами, где они находятся из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, заданной в области пространственной переменной. Следовательно, использование дополнительных функций и дополнительных условий на границе приводит к другому направлению определения собственных чисел и собственных функций, в сравнении с классическими методами.

В настоящей диссертации собственные числа также находятся из алгебраического полинома, однако он получается не в результате интегрирования уравнения относительно дополнительной функции, а из выполнения уравнения задачи Штурма – Лиувилля в некоторых дискретных точках области (точках коллокации), включая и граничные точки.

Учет зависимости свойств от температуры приводит к нелинейным задачам, точные решения которых не получены. Нелинейные задачи еще более усложняются в случаях, когда необходимо учитывать также зависимость от температуры внутренних источников теплоты, например, в задачах теплового воспламенения и взрыва. Применительно к решению нелинейных краевых задач распространение получил интегральный метод теплового баланса. Его отличительной особенностью является выполнение искомым решением не исходного дифференциального уравнения, а его осредненного аналога (интеграла теплового баланса), что позволяет приводить уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению относительно временно́й переменной. Преимущество

метода в том, что интегрирование исходного уравнения по пространственной переменной заменяется на более простую операцию вычисления интегралов в полученном в результате осреднения интегральном уравнении. Процесс осреднения по пространству снижает точность получаемого решения. Возможность его уточнения связана с использованием дополнительных условий на границе, позволяющих выполнить исходное уравнение в граничных точках.

Классические модели теплообмена для жидкостей содержат допущение о независимости распределения скорости от температуры. Формула профиля скорости в этом случае находится из уравнения Навье – Стокса, приводящегося для стабилизированного течения к уравнению Пуассона [75, 100]. Из его решений следует, что форма профиля скорости определяется вязкостью среды и перепадом давления на концах канала. Учитывая существенную зависимость вязкости от температуры, ее неучёт в математических моделях может приводить к значительному отличию получаемых результатов от реальных процессов.

Учёт зависимости вязкости от температуры при расчётах скорости в жидкостях дан в работе [75]. В ней используются следующие формулы: $\mu(T)=\mu_0(1-\beta(T-T_0))$; $\mu(T)=\mu_0 e^{-\beta(T-T_0)}$, где μ_0 – вязкость при $T=T_0$; β – коэффициент; T_0 – начальная температура. Из них следует, что при нагреве вязкость уменьшается, а при охлаждении – увеличивается. При использовании этих формул температура входит в уравнение Навье – Стокса. И для определения скорости и температуры необходимо совместное решение сложных нелинейных уравнений движения и энергии. Постановка задачи настолько усложняется, что её аналитическое решение затруднительно. В работах [114, 117, 120, 123] эта система упрощается ввиду неучёта нестационарности течения и конвективного теплообмена. Подобное упрощение допустимо лишь при $\mathrm{Re}<1$, что снижает круг задач, к которым можно применить этот метод.

В работе [101] предложен метод учёта температурной зависимости вязкости, когда уравнения движения и энергии решаются раздельно. Формула для вязкости принимается некоторой функцией поперечной координаты. Она не включает температуру, и поэтому уравнения движения и энергии решаются

раздельно. Однако метод приближённый, так как изменение вязкости от координаты задаётся в допущении, что вязкость от температуры изменяется по такому же закону.

Интерес к получению аналитических решений задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды при зависящих от температуры источниках теплоты связан с внедрением в технике композиционных материалов, а также с необходимостью исследования процессов, сопровождающихся тепловым воспламенением и взрывом. Исследование подобных задач с помощью известных точных и приближенных аналитических методов не представляется возможным [42, 59, 60].

В работах [32, 33] формулируются математически эквивалентные дифференциальному уравнению последовательности (либо бесконечные системы) из тождеств, с многократно интегрируемой по временно̀й координате граничной функцией. В итоге, на основе применения интеграла теплового баланса, решение задачи сводится к одному интегро – дифференциальному уравнению относительно граничной функции, которое с помощью подстановки сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, причем, с нулевыми начальными условиями. Решением полученной задачи Коши, по сути, завершается процесс нахождения температурной функции. В работах [20, 53, 94] применительно к решению нестационарных задач теплопроводности и при определении скорости в движущихся жидкостях вводятся дополнительные условия на границе и дополнительные функции. Условия на границах находятся в таком виде, чтобы их выполнение получаемым решением было эквивалентно выполнению дифференциального уравнения в граничных точках. Дополнительные искомые функции представляют изменение температуры во времени в одной из граничных точек. В работах [51, 95] путём доказательства соответствующих теорем показано, что выполнение уравнения на границах при большом числе используемых дополнительных граничных условий приводит к его выполнению и внутри области, исключая процесс его непосредственного интегрирования по пространственной переменной. В работах [115, 121]

рассматриваются модификации методов работ [21, 19, 56, 51]. И, частности, дополнительная функция впервые задается в точках задания граничного условия первого рода, в связи с чем, она принимается в виде производной от температуры в этой точке. В работе [12] источник теплоты в неоднородном двумерном уравнении, инициируемый электромагнитным импульсом, зависит от координат и времени. Решение задачи получено численным методом с использованием локально – одномерной схемы. В работах [25, 26] рассматривается численное решение нелинейной математической модели двухфазной задачи Стефана для слоистой системы диэлектриков при зависимости параметров среды от температуры и источника теплоты от координаты. В работе [18] рассматривается построение аналитического решения задачи теплопроводности, моделирующей температурное поле, возникающее в процессе сварки под флюсом. Для решения задачи использована теорема Дюамеля и конечные интегральные преобразования.

Одним из эффективных направлений получения аналитических решений указанных задач является применение ДГУ и ДИФ в интегральном методе теплового баланса. Основная проблема этого метода – низкая точность получаемых решений, которая связана с недостаточным количеством граничной информации, что ограничивает получение решения при большом числе приближений [16, 34, 36–47, 49–52]. Эффективным решением этой проблемы является использование ДГУ, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение в граничных точках было эквивалентно выполнению в них исходного дифференциального уравнения. Такого вида ДГУ выполняются и при любом другом методе получения решений, включая и классические точные аналитические методы, несмотря на то что они не выделяются в них в качестве отдельного рассмотрения.

Дополнительная искомая функция, представляющая временно̀е изменение температуры в одной из точек пространственной переменной, также является искомой величиной в любом методе получения аналитического решения, не являясь предметом специального рассмотрения. Ее раздельное рассмотрение в интегральном методе теплового баланса позволяет понизить порядок исходного

дифференциального уравнения в частных производных, сводя его к временно̀му обыкновенному уравнению относительно ДИФ, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи. Главный эффект ее использования состоит в смене способа определения собственных чисел, определяемых в классических методах из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, заданной в области пространственной переменной. Использование ДИФ совместно с ДГУ позволяет находить аналитические решения сложнейших нелинейных краевых задач, в том числе и с зависящими от температуры физическими свойствами среды и источниками теплоты, что оказывается возможным, благодаря использованию специфических свойств ДГУ в интегральном методе теплового баланса, позволяющих исключить процесс непосредственного интегрирования исходного дифференциального уравнения по пространственной переменной, заменяя его более простой операцией определения интеграла теплового баланса, представляющего осредненный аналог исходного уравнения.

Настоящая диссертация посвящена разработке аналитических методов решения краевых задач применительно к установкам пиролиза метана с целью получения водорода и углерода. Водород используется как химическое сырье и как топливо, при горении которого не образуется углекислый газ.

Для его получения применяются: электролиз воды, паровая конверсия метана; газификация угля. Перечисленные методы требуют больших затрат энергии, а также получается углекислый газ. Следовательно, нужны экологичные и менее затратные методы его получения, например пиролиз метана [8, 17, 98]. Однако при использовании для нагрева метана электрических нагревателей следует учитывать, что при производстве электроэнергии происходят выбросы окислов углерода. В связи с чем, требуется разработка конструкций, использующих в качестве топлива получаемую в реакторе метано – водородную смесь. В работе [48] приводится методика расчета и конструкция реактора, в котором часть получаемой в реакторе метано – водородной смеси используется как топливо. Реактор изготовлен в Самарском государственном техническом университете, для которого даны расчеты: расхода метана; количества теплоты,

затрачиваемой на нагрев; общее количество требуемой теплоты, учитывая потери через изоляцию и с уходящими газами; расхода топлива и коэффициента полезного действия.

В работе [49] приведены результаты разработки и верификации математической модели пиролиза метана, включающей нестационарные уравнения диффузии с учетом конвективной составляющей процесса. Получены точные аналитические решения модели, которые были использованы при исследовании образования углерода, возникающего при нагреве метана до температуры пиролиза. Показано, что частицы меньших размеров получаются при более высоких температурах и за более короткое время.

Выводы

1. Решения нелинейных краевых задач теплопроводности не могут быть получены по какому-нибудь общему алгоритму ввиду невозможности применения к ним классических точных аналитических методов. Использование приближенных аналитических методов усложняется при увеличении числа приближений, так как при определении неизвестных функций принимаемого решения заданных граничных условий недостаточно, поэтому необходимы дополнительные условия на границах.

2. В известных методах решения нелинейных краевых задач теплопроводности недостаточно используется дополнительная искомая функция. Ее применение упрощает получение решения, так как позволяет сводить исходное уравнение в частных производных к интегрированию временно́го обыкновенного дифференциального уравнения относительно этой функции. Из его решения находятся собственные числа краевой задачи, определяемые в классических методах из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, решение которой в ряде случаев приводит к трансцендентным характеристическим уравнениям относительно собственных чисел. Решения таких уравнений возможны лишь численными методами.

3. В известной литературе практически отсутствуют математические модели теплового и гидродинамического пограничных слоев при зависящей от

поперечной координаты вязкости и температуропроводности. Модели в этом случае оказываются существенно нелинейными, получение решений которых затруднительно не только с помощью точных, но и приближенных аналитических методов. Применительно к их решению наиболее эффективным является интегральный метод, в котором выполняется не исходное уравнение, а его осредненный аналог – интеграл теплового баланса.

4. В известной литературе не приводятся результаты исследований теплового и динамического пограничного слоя при переменной вязкости и температуропроводности применительно к реактору пиролиза метана.

5. Отсутствуют исследования, связанные с объяснением причин интенсивного образования углеродных отложений на внутренних поверхностях стенок реакторов пиролиза метана.

6. Исходя из обзора работ, следует, что сформулированные в диссертации цель и задачи исследований пока ещё недостаточно разработаны – на их решение и ориентирована настоящая диссертация.

Глава 2. Разработка численно – аналитических методов исследования теплообмена в реакторах пиролиза метана

Реакторы пиролиза метана работают при температурах от 700 ℃ – при использовании катализаторов и до 1000 ℃ – без их использования. При их прогреве до указанного уровня температур необходимо отслеживать два важных параметра – перепад температуры по толщине стенки и скорость прогрева любой точки стенки во времени. Превышение первого параметра сверх допустимых величин приводит к возникновению квазистатических температурных напряжений (без учёта их изменения во времени), которые могут превышать предел прочности для данного материала. Превышение второго параметра приводит к возникновению динамических температурных напряжений, зависящих от времени, которые также могут превышать предел прочности. Для оценки указанных параметров необходимо выполнить теоретическое исследование температурного состояния стенки реактора, которое сводится к решению нестационарной задачи теплопроводности при несимметричных граничных условиях третьего рода. С одной стороны, стенка подвергается нагреву от горячих газов печи, а с другой, – нагревает пиролизуемый метан. При этом температуры сред и коэффициенты теплоотдачи в процессе пуска установки существенно отличаются и, в частности, со стороны горячего газа печи они значительно больше их значений со стороны нагреваемого метана. Например, существенное превышение коэффициента теплоотдачи со стороны печи объясняется высоким уровнем лучистого теплообмена. Такой перекос граничных условий, во-первых, существенно влияет на перепад температуры по толщине стенки и, во-вторых, на скорость её прогрева. Оба этих фактора вызывают появление соответственно квазистатических и динамических напряжений, приводящих, как показывают экспериментальные исследования [28], к образованию дефектов (в виде трещин) стенки реактора.

2.1. Расчет температурного состояния стенки реактора пиролиза метана при несимметричных граничных условиях третьего рода

Представлена задача теплопроводности для стенки реактора пиролиза метана в виде бесконечной пластины с условиями третьей краевой задачи. Решение представляет сумму двух функций, одна из которых представляет стационарную задачу с неоднородными условиями, а вторая – нестационарную, имеющую однородные граничные условия. Во второй задаче, разделяя переменные, для собственных чисел получаем краевую задачу Штурма – Лиувилля, решаемую методом коллокаций. Этот метод основан на выполнении дифференциального уравнения в дискретных точках области (точках коллокации). Отмечается высокая точность определения собственных чисел, получаемых из решения алгебраического полинома, степень которого зависит от числа точек коллокации. Так, при использовании 10 точек коллокации первые 5 собственных чисел практически совпадают с точными их значениями. Преимущество такого способа заключается в отсутствии необходимости интегрирования уравнения задачи Штурма – Лиувилля, сводя его к решению системы алгебраических линейных уравнений, получаемых в точках коллокации. Собственные числа, определяемые из решения степенного алгебраического полинома, могут быть найдены при любых сочетаниях чисел Био, задаваемых в граничных условиях.

Рассмотрим последовательность получения решения следующей задачи теплопроводности для металлической стенки реактора пиролиза метана с несимметричными условиями третьего рода:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0;\quad 0 < x < \delta); \tag{2.1}$$

$$T(x,0) = T_0; \tag{2.2}$$

$$\lambda\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} - \alpha_1\left[T(0,\tau) - T_1\right] = 0; \tag{2.3}$$

$$\lambda\frac{\partial T(\delta,\tau)}{\partial x} + \alpha_2\left[T(\delta,\tau) - T_2\right] = 0, \tag{2.4}$$

где T, x, τ – температура, координата, время; a, λ – температуропроводность и теплопроводность стенки реактора; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи; T_1 – температура газа внутри реактора; T_2 – температура газов печи; T_0 – начальная температура; δ – толщина пластины.

Реактор с плоской стенкой изготовлен в молодежной лаборатории «Нефтегазовые технологии производства водорода и графита» Самарского государственного технического университета.

Обозначим

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \frac{T - T_0}{T_2 - T_0}; \qquad D = \frac{T_0 - T_1}{T_2 - T_0}; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2};$$

$$\xi = \frac{x}{\delta}; \qquad \mathrm{Bi}_1 = \frac{\alpha_1 \delta}{\lambda}; \qquad \mathrm{Bi}_2 = \frac{\alpha_2 \delta}{\lambda}, \tag{2.5}$$

где Θ, ξ, Fo – безразмерные температура, координата, время (число Фурье); Bi_1, Bi_2 – числа Био.

Постановка задачи принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \tag{2.6}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial \xi} - \mathrm{Bi}_1[\Theta(0, \mathrm{Fo}) + D] = 0; \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi} + \mathrm{Bi}_2[\Theta(1, \mathrm{Fo}) - 1] = 0. \tag{2.9}$$

Решение задачи (2.6) – (2.9) запишем в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \Theta_{\mathrm{c}}(\xi) + \Theta_{\mathrm{н}}(\xi, \mathrm{Fo}), \tag{2.10}$$

где $\Theta_{\mathrm{c}}(\xi)$ – решение стационарной задачи с неоднородными условиями (2.8), (2.9); $\Theta_{\mathrm{н}}(\xi, \mathrm{Fo})$ – решение нестационарной задачи с однородными условиями.

Решение для стационарной задачи находим в виде

$$\Theta_{\mathrm{c}}(\xi) = F_1 + F_2 \xi, \tag{2.11}$$

где F_1, F_2 – постоянные, определяемые из граничных условий (2.8), (2.9).

Очевидно, что соотношение (2.11) удовлетворяет стационарному уравнению теплопроводности $d^2\Theta_c(\xi)/d\xi^2 = 0$. Подставляя (2.11) в (2.8), (2.9), для F_1 и F_2 имеем систему двух алгебраических уравнений. Ее решение: $F_1 = \left[(\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2 D)/(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2)\right] - D$; $F_2 = (\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2(D+1))/(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2)$.

Математическая постановка задачи для функции $\Theta_н(\xi,\mathrm{Fo})$

$$\frac{\partial\Theta_н(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta_н(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} \quad (\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1); \tag{2.12}$$

$$\Theta_н(\xi,0) = -\Theta_c(\xi); \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial\Theta_н(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} - \mathrm{Bi}_1\Theta_н(0,\mathrm{Fo}) = 0; \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial\Theta_н(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} + \mathrm{Bi}_2\Theta_н(1,\mathrm{Fo}) = 0. \tag{2.15}$$

Решение задачи (2.12) – (2.15) примем в виде

$$\Theta_н(\xi,0) = \varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi). \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (2.12), для $\varphi(\mathrm{Fo})$ и $\psi(\xi)$ получаем следующие уравнения

$$\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + \mu\varphi(\mathrm{Fo}) = 0; \tag{2.17}$$

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \mu\psi(\xi) = 0, \tag{2.18}$$

где μ – некоторая постоянная.

Интегрируя уравнение (2.17), имеем

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = A\exp(-\mu\mathrm{Fo}), \tag{2.19}$$

где A – постоянная.

Подставив (2.16) в (2.14), (2.15), имеем граничные условия для функции $\psi(\xi)$

$$\frac{d\psi(0)}{d\xi} - \mathrm{Bi}_1\psi(0) = 0; \tag{2.20}$$

$$\frac{d\psi(1)}{d\xi} + \mathrm{Bi}_2\psi(1) = 0. \qquad (2.21)$$

Соотношения (2.18), (2.20), (2.21) представляют краевую задачу Штурма – Лиувилля. Ее решение примем в виде

$$\psi\ (\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \xi^k\ , \qquad (2.22)$$

где b_k – неизвестные постоянные.

Неизвестные b_k $(k = \overline{1,6})$ находятся из уравнения (2.18), которое будем выполнять в четырех точках коллокации ($\xi = 0$; 0,2; 0,8; 1,0) и из условий (2.20), (2.21), положив $\mathrm{Bi}_1 = 3;\ \mathrm{Bi}_2 = 2$ (данные числа Био приняты с целью сравнения в дальнейшем полученного решения с точным решением, выполненным в [16]).

При $n = 6$ аппроксимирующее выражение (2.22) содержит шесть неизвестных коэффициентов $b_1, b_2, ... b_6$. Поэтому после подстановки (2.22) в указанные условия получается система из шести алгебраических уравнений:

$$b_1 - \mathrm{Bi}_1 = 0;$$

$$\mu + 2 \cdot b_2 = 0;$$

$$\mathrm{Bi}_2 + b_1 + 2 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3 + 4 \cdot b_4 + 5 \cdot b_5 + 6 \cdot b_6 + \mathrm{Bi}_2 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) = 0;$$

$$\mu + 2 \cdot b_2 + 1{,}2 \cdot b_3 + 0{,}48 \cdot b_4 + 0{,}16 \cdot b_5 + 0{,}048 \cdot b_6 + \mu \cdot (0{,}2 \cdot b_1 + 0{,}04 \cdot b_2 +$$
$$+0{,}008 \cdot b_3 + 0{,}0016 \cdot b_4 + 0{,}00032 \cdot b_5 + 0{,}000064 \cdot b_6) = 0;$$

$$\mu + 2 \cdot b_2 + 4{,}8 \cdot b_3 + 7{,}68 \cdot b_4 + 10{,}24 \cdot b_5 + 12{,}288 \cdot b_6 + \mu \cdot (0{,}8 \cdot b_1 + 0{,}64 \cdot b_2 +$$
$$+0{,}512 \cdot b_3 + 0{,}4096 \cdot b_4 + 0{,}32768 \cdot b_5 + 0{,}262144 \cdot b_6) = 0;$$

$$\mu + 2 \cdot b_2 + 6 \cdot b_3 + 12 \cdot b_4 + 20 \cdot b_5 + 30 \cdot b_6 + \mu \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) = 0.$$

Решение полученной системы выполнялось последовательно. Из первых двух уравнений находятся коэффициенты: $b_1 = \mathrm{Bi}_1,\ b_2 = -\frac{\mu}{2}$.

С учетом принятого значения $\mathrm{Bi}_1 = 3$ имеем:

$$b_1 = 3;\ b_2 = -0{,}5\mu;$$

Далее найденные значения b_1 и b_2 подставляются в оставшиеся четыре уравнения системы. После этого неизвестными остаются только коэффициенты

b_3, b_4, b_5, b_6. Поскольку параметр μ входит в коэффициенты системы, найденные значения b_3, b_4, b_5, b_6 представляются в виде рациональных функций от μ. Для сокращения записи знаменатели полученных выражений обозначены через η_1 и η_2. Они представляют собой многочлены по параметру μ, возникающие при приведении решения системы к рациональному виду. Символьные преобразования выполнены с использованием Mathcad.

В результате получаем:

$$b_3 = -(66\mu^4 - 18421\mu^3 + 1,261237\cdot 10^6\mu^2 - 1,956\cdot 10^7\mu + 4,95\cdot 10^7)/\eta_1;$$

$$b_4 = (316\mu^4 - 98012\mu^3 + 7,989237\cdot 10^6\mu^2 - 1,3200375\cdot 10^8\mu + 3,58875\cdot 10^8)/\eta_2;$$

$$b_5 = -(150\mu^4 - 47825\mu^3 + 4,0323\cdot 10^6\mu^2 - 6,75225\cdot 10^7\mu + 1,85625\cdot 10^8)/\eta_1;$$

$$b_6 = (100\mu^4 - 31950\mu^3 + 2,685075\cdot 10^6\mu^2 - 4,5015\cdot 10^7\mu + 1,2375\cdot 10^8)/\eta_2;$$

$$\eta_1 = 2434\mu^2 - 16\mu^3 + 101250\mu - 2,25\cdot 10^6;\ \eta_2 = 2\eta_1. \qquad (2.23)$$

Подставляя b_k в (2.22), получаем

$$\psi(\xi) = 1 + 3\xi - 0,5\mu\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4 + b_5\xi^5 + b_6\xi^6. \qquad (2.24)$$

Подставим (2.24) в (2.18) и применим полученное соотношение для точки $\xi = 0,5$, считая эту точку наряду с точками $\xi = 0$; 0,2; 0,8; 1,0, еще одной точкой коллокации.

$$\begin{aligned} &-2\cdot 0,5\mu + 6b_3\cdot 0,5 + 12b_4\cdot 0,5^2 + 20b_5\cdot 0,5^3 + 30b_6\cdot 0,5^4 + \mu(1 + 3\cdot 0,5 - \\ &- 0,5\mu\cdot 0,5^2 + b_3\cdot 0,5^3 + b_4\cdot 0,5^4 + b_5\cdot 0,5^5 + b_6\cdot 0,5^6) = 0. \end{aligned} \qquad (2.25)$$

Соотношение (2.25) для определения собственных чисел μ_k является полиномом пятой степени.

После подстановки коэффициентов (2.23) в соотношение (2.25) получаем:

$$36\cdot\mu^5 - 19350\cdot\mu^4 + 3,094281\cdot 10^6\cdot\mu^3 - \frac{-1,46951496\cdot 10^8\cdot\mu^2 + 2,03553\cdot 10^9\cdot\mu - 5,346\cdot 10^9}{311552\cdot\mu^2 - 2048\cdot\mu^3 + 1,296\cdot 10^7\cdot\mu - 2,88\cdot 10^8} = 0$$

Его корни: $\mu_1 = 3,404306$; $\mu_2 = 17,6496$; $\mu_3 = 46,4783$; $\mu_4 = 189,7979$; $\mu_5 = 280,1699$. Точные значения собственных чисел [15]: $\mu_1 = 3,404290543$;

$\mu_2 = 17,683680068;\ \ \mu_3 = 48,569017423;\ \ \mu_4 = 98,357137508;\ \ \mu_5 = 167,633133513.$

Отметим, что первое собственное число в четвертом знаке отличается от его точного значения. Большие расхождения с точными значениями четвертого и пятого собственных чисел оказывает влияние на точность получаемого решения лишь при малых Fo $(\mathrm{Fo} < 0,02,$ см. рис. 2.1$)$. Данное обстоятельство объясняется тем, что при четырех точках коллокации наиболее точно определяется первое собственное число, тогда как последующие собственные числа являются более чувствительными к числу используемых точек коллокации и степени аппроксимации. При этом составляющие решения, соответствующие большим значениям (μ_k), содержат экспоненциальные множители вида $(\exp(-\mu\mathrm{Fo}))$. Поэтому с увеличением числа Фурье эти составляющие быстро затухают и практически не оказывают влияния на температурное поле.

Таким образом, расхождения четвертого и пятого собственных чисел заметно сказываются только на самом начальном участке нестационарного процесса. При дальнейшем увеличении Fo основную роль в решении играет первое слагаемое, для которого уже при четырех точках коллокации получено хорошее совпадение с точным значением.

Для уточнения последующих собственных чисел далее был выполнен расчет при увеличенном числе точек коллокации.

Собственные функции для каждого собственного числа находятся из (2.24)

$$\psi_i(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{6} b_k(\mu_i)\xi^k, \quad (i = \overline{1,5}). \tag{2.26}$$

Подставляя (2.19), (2.26) в (2.16), имеем

$$\Theta_{\text{н}}(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{i=1}^{5}\left[A_i \exp(-\mu_i \mathrm{Fo})\left(1 + \sum_{k=1}^{6} b_k(\mu_i)\xi^k\right)\right]. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.11), (2.27) в (2.10), находим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = F_1 + F_2\xi + \sum_{i=1}^{5}\left[A_i \exp(-\mu_i \mathrm{Fo})\left(1 + \sum_{k=1}^{6} b_k(\mu_i)\xi^k\right)\right]. \tag{2.28}$$

Для определения постоянных A_i $(i=\overline{1,5})$ составим невязку условия (2.7) и потребуем выполнения ее ортогональности к собственным функциям $\psi_i(\xi)$:

$$\int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^{5} A_i (1 + \sum_{k=1}^{6} b_k(\mu_i)\xi^k) \right) + F_1 + F_2\xi \right] \psi_j(\xi)\, d\xi = 0 \quad (j=i=\overline{1,5}). \qquad (2.29)$$

Соотношение (2.29) для постоянных A_i $(i=\overline{1,5})$ представляет систему пяти алгебраических уравнений. Ее решение: $A_1 = -0{,}2751$; $A_2 = 0{,}1365$; $A_3 = -0{,}0530$; $A_4 = 0{,}0504$; $A_5 = -0{,}0498$.

Анализ расчетов по (2.28) и их сравнение с точным решением [16] позволяет заключить, что их расхождение в чебышевской норме при $0{,}01 \le \mathrm{Fo} < \infty$ их расхождение составляет составляет 2 % (рис.2.1).

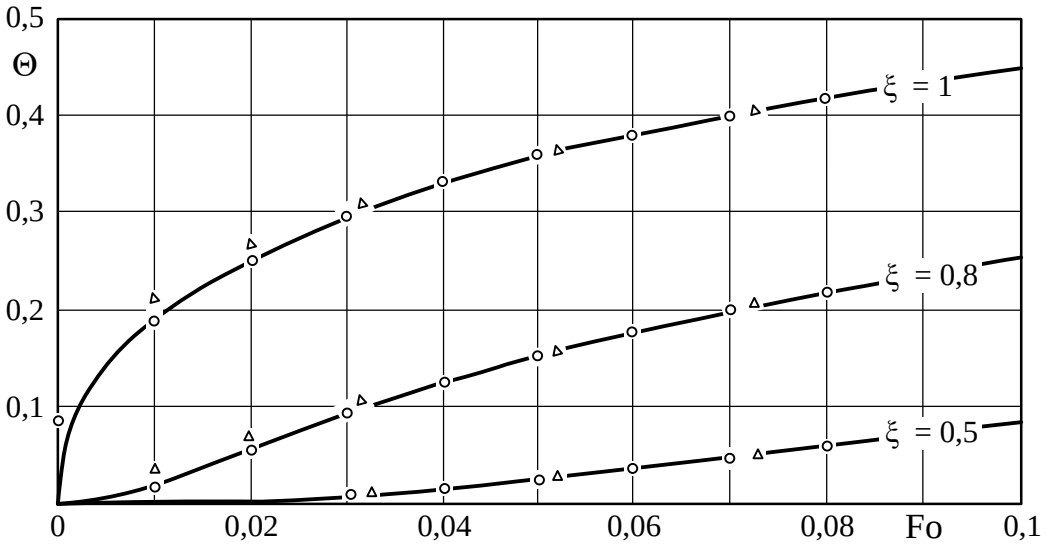


Рис. 2.1. Распределение температуры: —— – точное решение [16];
∘ – по формуле (2.32); Δ – по формуле (2.28)

Если выполнять уравнение (2.18) в десяти точках коллокации ($\xi = 0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0), то с учетом выполнения граничных условий (2.20), (2.21) (при $\mathrm{Bi}_1 = 3$; $\mathrm{Bi}_2 = 2$) соотношение (2.22) принимает вид

$$\psi(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{12} b_k(\mu)\xi^k, \qquad (2.30)$$

где $b_k(\mu)$ $(k=\overline{1,12})$ находятся из системы 12 алгебраических уравнений, сформулированных в точках коллокации и точках границы.

Подставляя (2.30) в (2.18) применительно к точке $\xi=0,5$, для собственных чисел μ_k $(k=\overline{1,5})$ получаем алгебраический полином, первые пять собственных чисел которого имеют следующие величины: $\mu_1=3,404291$; $\mu_2=17,683682$; $\mu_3=48,569408$; $\mu_4=98,246502$; $\mu_5=166,214779$. Можно отметить, что с увеличением числа точек коллокации происходит существенное повышение точности определения собственных чисел в связи с увеличением точности выполнения уравнения (2.18) во всем диапазоне пространственной переменной $0\le\xi\le1$.

Соотношения (2.27) и (2.28) в данном случае будут

$$\Theta_{\text{н}}(\xi,\text{Fo})=\sum_{i=1}^{5}\left[A_i\exp(-\mu_i\text{Fo})(1+\sum_{k=1}^{12}b_k(\mu_i)\xi^k)\right]; \qquad (2.31)$$

$$\Theta(\xi,\text{Fo})=F_1+F_2\xi+\sum_{i=1}^{5}\left[A_i\exp(-\mu_i\text{Fo})(1+\sum_{k=1}^{12}b_k(\mu_i)\xi^k)\right], \qquad (2.32)$$

где постоянные A_i $(i=\overline{1,5})$, находятся из условия (2.7).

Расчеты по (2.32) при $0,01\le\text{Fo}<\infty$ практически совпадают с точным решением (рис. 2.1).

Применительно к расчету температуры стенки реактора пиролиза метана числа Bi_1 и Bi_2, учитывая лучистый теплообмен, приняты следующими: $\text{Bi}_1=0,2$; $\text{Bi}_2=1,0$. Они приняты такого вида в соответствии с учетом лучистого теплообмена [58, 65, 66, 74].

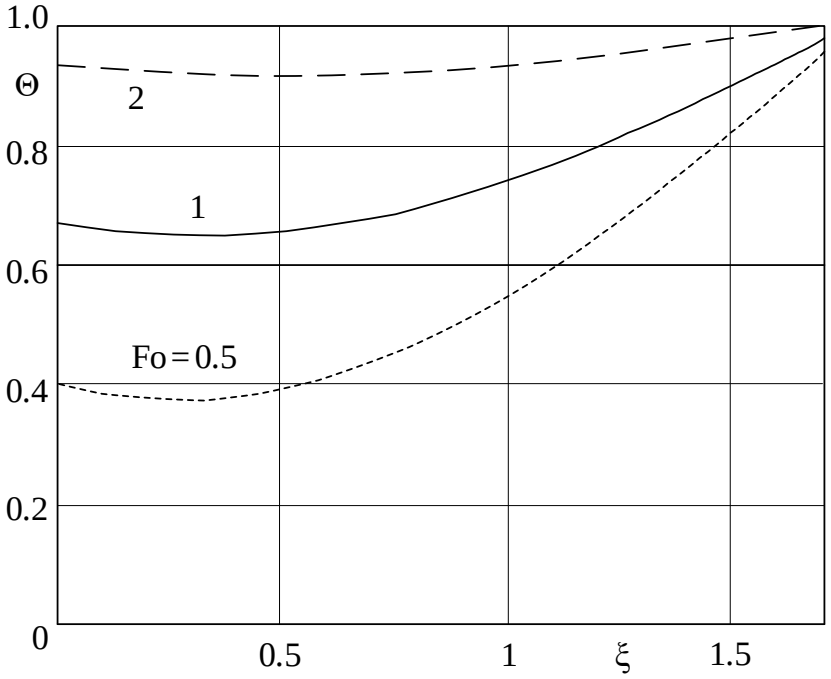


Рис. 2.2. Распределение температуры. Расчёт по формуле (2.32)

Числа $\mathrm{Bi}_1 = 0,2;\ \mathrm{Bi}_2 = 1,0$ найдены при следующих исходных данных: $T_1 = 900\,^{\circ}\mathrm{C};\ T_2 = 1000\,^{\circ}\mathrm{C};\ \alpha_1 = 120\ Вт/(м^2 \cdot К);\ \alpha_2 = 600\ Вт/(м^2 \cdot К);\ \delta = 0,01\ м;$ $\lambda = 6\ Вт/(м \cdot К);\ a = 6 \cdot 10^{-6}\ м^2/с;\ \mathrm{Bi}_1 = \alpha_1\delta/\lambda = 0,2;\ \mathrm{Bi}_2 = \alpha_2\delta/\lambda = 1,0.$ Расчеты по (2.32) даны на рис. 2.2.

Анализ результатов расчётов, приведённых на рис. 2.2, позволяет заключить, что при $\mathrm{Fo} = 0,5$ ($\tau = 30\,с$) стенка реактора при $\xi = 0$ прогревается до температуры $T(0;30) = 412\,^{\circ}\mathrm{C}$. При $\mathrm{Fo} = 2,0$ ($\tau = 2$ *мин*) она становится равной $915\,^{\circ}\mathrm{C}$ и практически устанавливается стационарное состояние. Отметим, что исследование интенсивности прогрева стенки реактора пиролиза метана позволяет выполнять оценку скорости её прогрева. В случае, если она превышает допустимые значения (исходя из работоспособности материала стенки), то её уменьшение возможно путём соответствующей настройки мощности нагревательных элементов. Отметим, что расчет динамических температурных напряжений не входит в тематику диссертации.

2.2. Нелинейные задачи теплопроводности с температурно-зависящими источниками теплоты

Ввиду того, что реакторы пиролиза метана в процессе их пусков работают в широком диапазоне температур (от 20 ℃ до 1000 ℃), возникает необходимость учёта изменения физических свойств стенки реактора от температуры. Краевые задачи, в которых учитывается переменность физических свойств от температуры, становятся нелинейными. Задачи ещё более усложняются, когда наряду с нелинейностью физических свойств необходимо также учитывать и нелинейность внутреннего источника теплоты. Такого рода задачи возникают при индукционном прогреве реактора.

В настоящем разделе приводится решение нелинейной задачи теплопроводности, когда коэффициент теплопроводности и источник теплоты являются функциями температуры. Дополнительная функция задается в какой – либо одной точке пространства и зависит только от времени. Выбор точки пространства не оказывает влияние на получаемое решение. Дополнительная функция сводит исходное уравнение в частных производных к временно́му обыкновенному уравнению, имеющему решение лишь при некоторых дискретных (собственных) значениях его характеристического уравнения, в отличие от классических методов, где собственные числа находятся из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, определенной в области пространственной переменной. Таким образом, здесь рассматривается иное направление получения собственных чисел, отличающееся тем, что нет необходимости разделения переменных дифференциального уравнения, что позволяет получать аналитические решения сложных задач, для которых неприменим метод разделения переменных.

Рассмотрим следующую задачу

$$c\rho\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(t)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right]+\omega(t)\quad(\tau>0;\quad 0<x<\delta);\tag{2.33}$$

$$t(x,0)=t_0;\tag{2.34}$$

$$t(0,\tau) = t_1; \qquad (2.35)$$

$$\partial t(\delta,\tau) / \partial x = 0; \qquad (2.36)$$

где t, x, τ – температура, координата, время; $\lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности; c – теплоемкость; ρ – плотность; t_0 – начальная температура; t_1 – температура при $x = 0$ $(t_1 > t_0)$; $\omega(t)$ – мощность источника теплоты; δ – толщина пластины.

Для упрощения получения решения начальную температуру примем за условный нуль температуры, то есть обозначим: $T = t - t_0$. Задача (2.33) – (2.36) примет вид

$$c\rho \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right] + \omega(T) \qquad (\tau > 0; \quad 0 < x < \delta); \qquad (2.37)$$

$$T(x,0) = 0; \qquad (2.38)$$

$$T(0,\tau) = \Delta t; \qquad (2.39)$$

$$\partial T(\delta,\tau) / \partial x = 0, \qquad (2.40)$$

где $\Delta t = t_1 - t_0$.

Найдем решение задачи (2.37) – (2.40) при следующих зависимостях коэффициента теплопроводности и источника теплоты от температуры

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 + \beta T); \qquad (2.41)$$

$$\omega(T) = \omega_0(1 + \gamma T). \qquad (2.42)$$

где λ_0, ω_0 – коэффициент теплопроводности и мощность источника теплоты при $t = t_0$, то есть при $T = 0$; β, γ имеют размерность (K^{-1}) – коэффициенты.

В соотношениях (2.41), (2,42) коэффициент теплопроводности и мощность источника теплоты возрастают с увеличением температуры. Интенсивность этого возрастания характеризуется коэффициентами β, γ.

Уравнение (2.37) с учетом (2.41), (2.42) будет

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[(1 + \beta T(x,\tau))\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right] + \frac{\omega_0}{c\rho}(1 + \gamma T(x,\tau)), \qquad (2.43)$$

где $a_0 = \lambda_0 / (c\rho)$.

Введем обозначения

$$\Theta = T/\Delta t; \qquad \mathrm{Fo} = a_0 \tau / \delta^2; \qquad \xi = x / \delta, \qquad (2.44)$$

где Θ, Fo, ξ – безразмерные температура, время, координата.

С учетом обозначений (2.44) постановка задачи примет вид

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\beta\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo}))\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right]+\mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo})) \qquad (2.45)$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1);$$

$$\Theta(\xi,0)=0; \qquad (2.46) \qquad \Theta(0,\mathrm{Fo})=1; \qquad (2.47)$$

$$\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi=0, \qquad (2.48)$$

где $\mathrm{Po}=\dfrac{\omega_0\delta^2}{\lambda_0\Delta t}$ – число Померанцева.

Введем дополнительную функцию $q(\mathrm{Fo})$ последовательно в точках: $\xi=0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1{,}0$. Найдем сначала решение при задании дополнительной функции в точке $\xi=0{,}25$, то есть

$$q(\mathrm{Fo})=\Theta(0{,}25;\ \mathrm{Fo}). \qquad (2.49)$$

Функция $q(\mathrm{Fo})$ представляет температуру в точке $\xi=0{,}25$. Температура в этой точке, как и в любой из указанных выше точек, является искомой величиной задачи $(2.45)-(2.48)$ при любом методе ее решения. Поэтому отдельное рассмотрение температур в этих точках не оказывает влияния на исходную задачу, а позволяет лишь упростить получение ее аналитического решения.

Решение задачи (2.45) – (2.48) с учетом (2.49) примем в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1-\sum_{k=1}^{n}b_k(q)\varphi_k(\xi), \qquad (2.50)$$

где $b_k(q)$ – неизвестные функции; $\varphi_k(\xi)$ – координатные функции вида

$$\varphi_k(\xi)=\sin(r\pi\xi/2) \quad (r=2k-1). \qquad (2.51)$$

Соотношение (2.50) (с учетом (2.51)) удовлетворяет условиям (2.47), (2.48). Неизвестные $b_k(q)$ находятся из (2.49) и некоторых дополнительных условий, задаваемых на границе, вывод которых рассматривается ниже.

Подставим (2.50), ограничившись одним членом ряда, в (2.49)

$$q(\mathrm{Fo})=1-b_1(q)\sin\left((\pi\cdot\xi)/2\right). \qquad (2.52)$$

Отсюда находим

$$b_1(q) = -\frac{2(q(\mathrm{Fo})-1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}. \tag{2.53}$$

Соотношение (2.50) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{2(q(\mathrm{Fo})-1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\sin\left((\pi\cdot\xi)/2\right). \tag{2.54}$$

Осредняя уравнение (2.45) по переменной ξ, находим интеграл теплового баланса

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} - \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\beta\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo}))\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} \right] - \mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo})) \right\} d\xi = 0. \tag{2.55}$$

Подставляя (2.54) в (2.55), после определения интегралов для функции $q(\mathrm{Fo})$ получаем обыкновенное уравнение

$$\begin{gathered} 4\frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + \pi^2(\beta\Delta t+1)(q(\mathrm{Fo})-1) - \\ -\mathrm{Po}\left[\pi\sqrt{2-\sqrt{2}} - 4\gamma\Delta t + \gamma\pi\Delta t\sqrt{2-\sqrt{2}} + 4\gamma\Delta t q(\mathrm{Fo}) \right] = 0. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Интегрируя (2.56), находим

$$q(\mathrm{Fo}) = \frac{\pi\mathrm{Po}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t - 4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} + 1 + C\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma\mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2\beta\Delta t}{4} \right)\mathrm{Fo} \right), \tag{2.57}$$

где C – постоянная.

Подставив (2.57) в (2.54), имеем

$$\begin{gathered} \Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \left(\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{2\pi\mathrm{Po}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t - 4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} + \right.\right. \\ \left.\left. + 2C\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma\mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2\beta\Delta t}{4} \right)\mathrm{Fo} \right) \right] \right) \Big/ \sqrt{2-\sqrt{2}}, \end{gathered} \tag{2.58}$$

где коэффициент под экспонентой

$$\nu_1 = -\frac{\pi^2}{4} + \gamma\mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2\beta\Delta t}{4} \tag{2.59}$$

является первым собственным числом задачи (2.45) – (2.48).

Для расчета постоянной C найдем интеграл взвешенной невязки начального условия (2.46)

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi = 0. \qquad (2.60)$$

Подставляя (2.58) в (2.60), для определения C получаем алгебраическое уравнение. Его решение:

$$C = -\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pi} - \frac{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\mathrm{Po}(\gamma\Delta t+1)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t - 4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}. \qquad (2.61)$$

Формула (2.58) с учетом (2.61) представляет первое приближение задачи (2.45) – (2.48). Она точно удовлетворяет (2.47), (2.48) и приближенно – уравнению (2.45) и условию (2.46). Если принять $\mathrm{Po}=0;\ \gamma=0;\ \beta=0$, то имеем линейную задачу без источника теплоты. Решение (2.58) в этом случае принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{4}{\pi}\exp(-\nu_1^*\mathrm{Fo})\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right), \qquad (2.62)$$

где $\nu_1^* = \pi^2/4$ – первое собственное число линейной задачи без источника теплоты, совпадающее с точным его значением [60].

В классических методах собственные числа определяются из задачи Штурма – Лиувилля, определенной в области пространственных координат. Здесь они находятся из временно́го обыкновенного уравнения относительно дополнительной функции, зависящей лишь от времени. Для линейных задач собственные числа совпадают с точными. Следовательно, здесь используется более простой метод их определения.

Анализ расчетов по (2.62) в сравнении с точным решением [60] приводит к выводу о том, что их расхождение в чебышевской норме в точке $\xi = 0{,}8$ при $\mathrm{Fo} = 0{,}12$ не превышает 3% (рис. 2.3).

Соотношение (2.58) позволяет отделить стационарные режимы от режимов неограниченного возрастания температуры (теплового взрыва). В случае, если коэффициент показателя экспоненты $-\pi^2(1+\beta\Delta t)/4 + \gamma\mathrm{Po}\Delta t > 0$, то с увеличением

числа Fo будет происходить неограниченное возрастание температуры (тепловой взрыв). При $-\pi^2(1+\beta\Delta t)/4+\gamma \mathrm{Po}\Delta t<0$ неограниченное возрастание числа Fo приводит к стационарному состоянию. Знак соотношения под экспонентой определяется величинами β, γ, Po, задаваемыми в исходных данных задачи.

На рис. 2.4 даны расчеты по (2.58) при исходных данных: $\beta=0{,}1;\gamma=1;$ $\mathrm{Po}=0{,}1;\ \Delta t=10$. Очевидно, что в данном случае показатель экспоненты отрицательный и при $\mathrm{Fo}>2$ практически устанавливается стационарное состояние. При исходных данных: $\beta=0{,}1;\ \gamma=0.1;\ \mathrm{Po}=5;\ \Delta t=10$ показатель экспоненты положительный и при $\mathrm{Fo}\to\infty$ температура устремляется к бесконечному значению (тепловой взрыв) (см.рис 2.5).

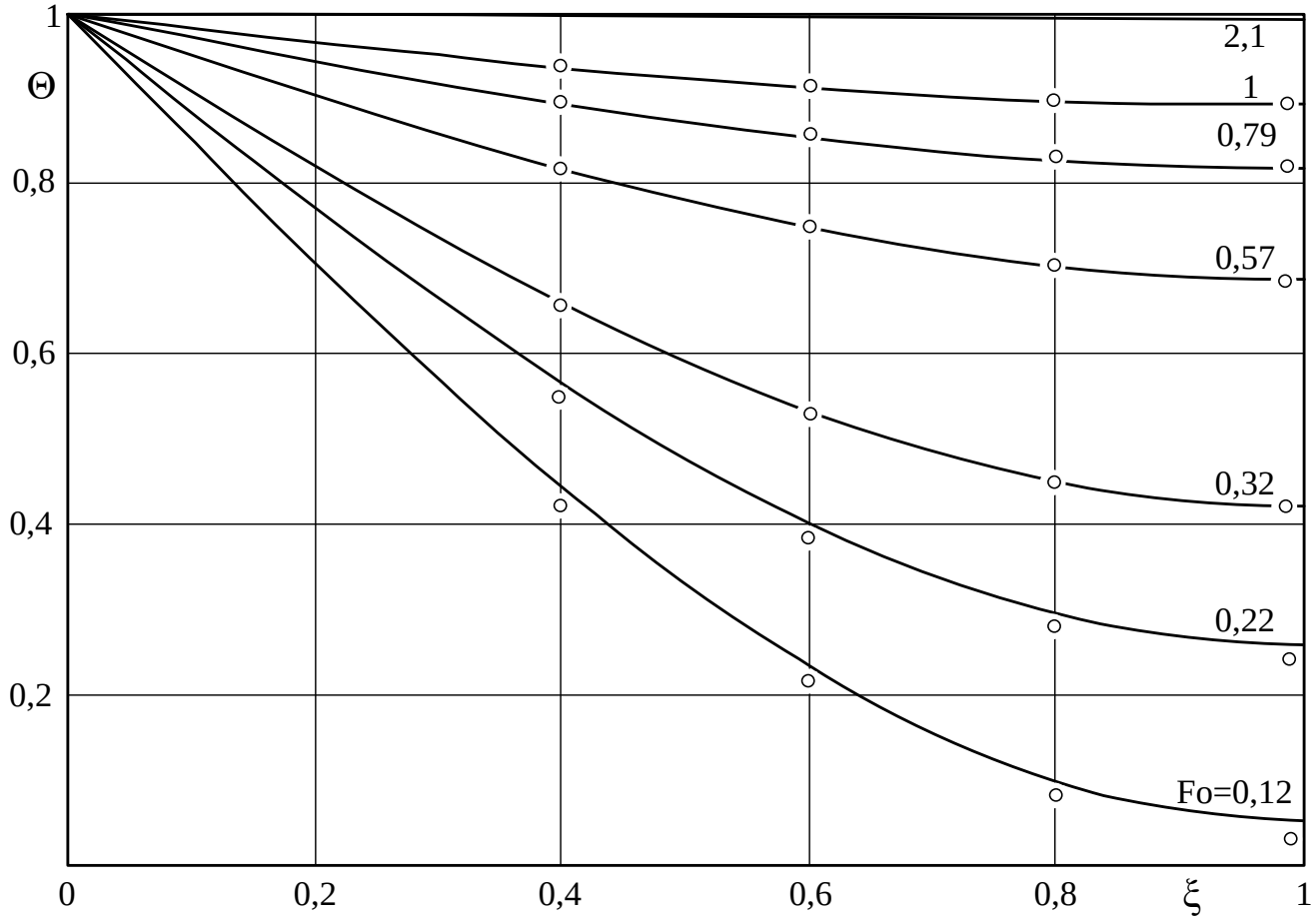


Рис. 2.3. Изменение температуры.
——— – по формуле (2.62); ° – точное решение [60]

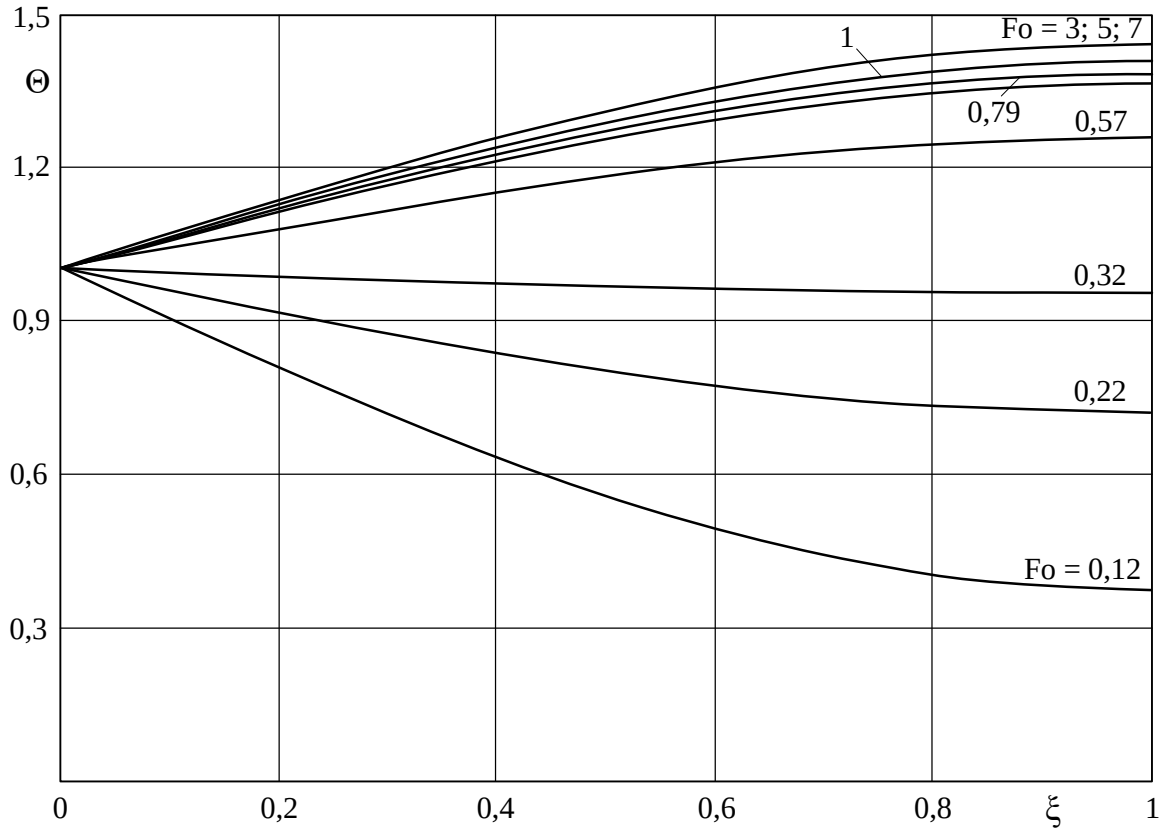


Рис. 2.4. Изменение температуры.
——— – по формуле (2.58). $\gamma = 1$; $\beta = 0{,}1$; $\mathrm{Po} = 0{,}1$; $\Delta t = 10$

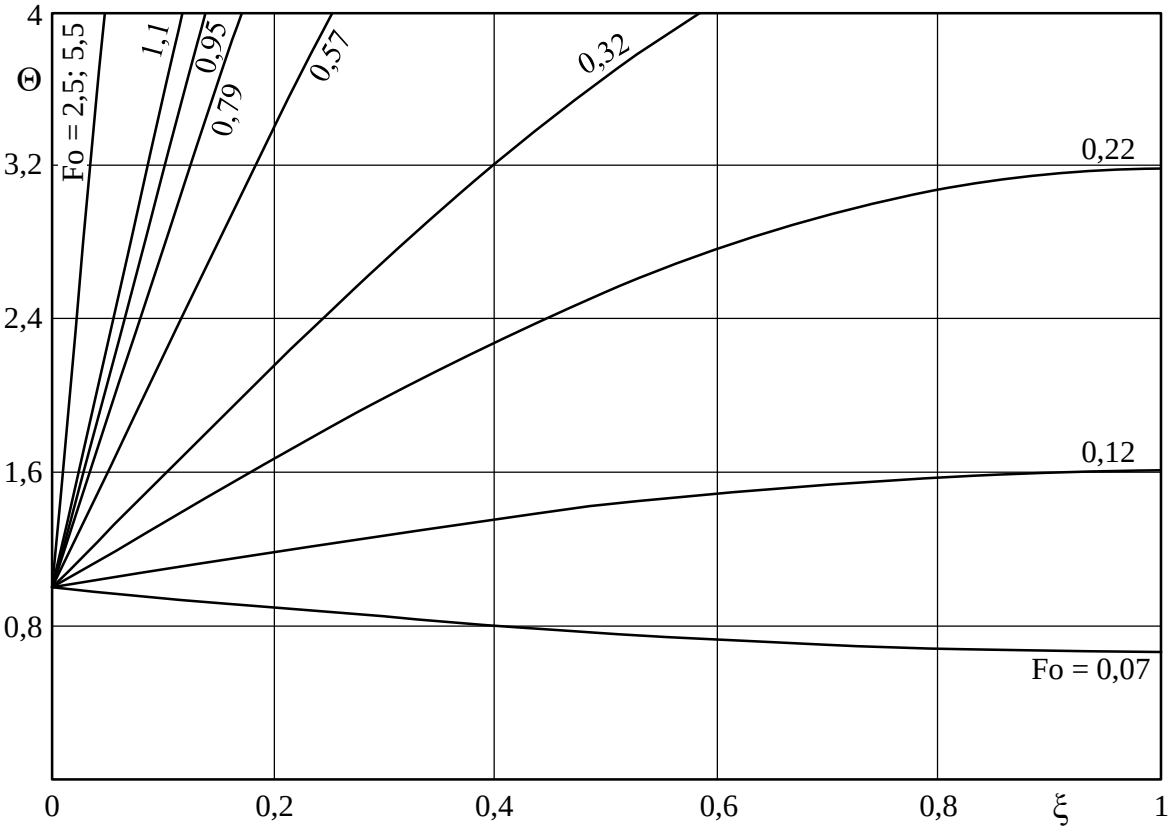


Рис. 2.5. Изменение температуры.
——— – по формуле (2.58). $\gamma = 0{,}1$; $\beta = 0{,}1$; $\mathrm{Po} = 5$; $\Delta t = 10$

Повышение точности определяется с увеличением числа членов ряда (2.50). Его неизвестные находятся из (2.49), дополнительных условий на границе, и в точке $\xi = 0{,}25$ (где задана $q(\mathrm{Fo})$, см. (2.49)). Для определения дополнительных условий продифференцируем условия (2.47), (2.48), (2.49) по времени:

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = 0; \qquad (2.63) \qquad \frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}} = 0; \qquad (2.64)$$

$$\frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} = \left.\frac{\partial\Theta(\xi;\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\xi=0,25}. \qquad (2.65)$$

Продифференцируем уравнение (2.45) по переменной ξ:

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\xi} = 3\beta\Delta t\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \\ + (1+\beta\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo}))\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3} + \mathrm{Po}\gamma\Delta t\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}. \qquad (2.66)$$

Сопоставляя (2.63) с уравнением (2.45), учитывая (2.47), находим дополнительное условие в точке $\xi = 0$:

$$\beta\Delta t\left(\left.\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\right)^2 + (1+\beta\Delta t)\left.\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=0} + \mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t) = 0. \qquad (2.67)$$

Сопоставляя (2.64) и (2.66), с учетом (2.48) находим дополнительное условие в точке $\xi = 1$:

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}\right|_{\xi=1} = 0. \qquad (2.68)$$

Сопоставляя (2.65) и (2.45), находим дополнительное условие в точке $\xi = 0{,}25$:

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\beta\Theta(\xi;\mathrm{Fo})\Delta t)\frac{\partial\Theta(\xi;\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right]\Bigg|_{\xi=0,25} + \\ +\mathrm{Po}(1+\gamma\Theta(0,25;\mathrm{Fo})\Delta t). \qquad (2.69)$$

Выполнение получаемым решением условий (2.67), (2.68), (2.69) адекватно выполнению уравнения (2.45) в точках $\xi = 0$; $\xi = 0{,}25$ и $\xi = 1$. В работах [52, 95] показано, что выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и

внутри рассматриваемой области, исключая непосредственное интегрирование по пространственной переменной, ограничиваясь лишь определением интеграла теплового баланса. Отметим, что уравнение на границах выполняется и при любом другом методе получения решения, включая и точные методы. При этом в точке задания граничного условия первого рода оно удовлетворяется в предельном смысле – правая и левая части равны нулю [95].

Во втором приближении подставим (2.50) (при $n=4$) в (2.49), (2.67), (2.68), (2.69). Для $b_k(q)$ $(k=\overline{1,4})$ получаем систему алгебраических уравнений. Подставляя (2.50) (с учетом $b_k(q)$) в (2.55), для $q(\mathrm{Fo})$ получаем обыкновенное уравнение. Дальнейшая последовательность получения решения повторяется (как и для первого приближения).

Задавая дополнительную функцию вида (2.49) в точках $\xi=0{,}5;\ 0{,}75;\ 1{,}0$ и повторяя выполненные выше математические выкладки, соответственно указанным точкам получаем следующие решения:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{\pi\sqrt{2}\mathrm{Po}\left(1+\gamma\Delta t\right)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}+\right.$$
$$\left.+C_1\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4}+\gamma\mathrm{Po}\Delta t-\frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]+1; \qquad (2.70)$$

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\left(\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{2\pi\mathrm{Po}\sqrt{\sqrt{2}+2}\left(1+\gamma\Delta t\right)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2C_2\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4}+\gamma\mathrm{Po}\Delta t-\frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]\Big/\sqrt{\sqrt{2}+2}\right); \qquad (2.71)$$

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{2\pi\mathrm{Po}\left(1+\gamma\Delta t\right)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}+\right. \qquad (2.72)$$

$$+C_3\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4}+\gamma\mathrm{Po}\Delta t-\frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\Bigg]+1.$$

Константы интегрирования, определяемые из (2.46), соответственно решениям (2.70), (2.71), (2.72) имеют вид

$$C_1=-\frac{\pi\sqrt{2}\mathrm{Po}(\gamma\Delta t+1)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \tag{2.73}$$

$$C_2=-\frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}+2}\mathrm{Po}(\gamma\Delta t+1)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}-\frac{2\sqrt{\sqrt{2}+2}}{\pi}, \tag{2.74}$$

$$C_3=-\frac{4}{\pi}-\frac{2\pi\mathrm{Po}(\gamma\Delta t+1)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}. \tag{2.75}$$

Расчеты температуры по формулам (2.58), (2.70), (2.71), (2.72) показывают их полную идентичность. В таблице 1 приведены результаты расчетов безразмерной температуры по указанным формулам в точке $\xi=0{,}5$ при $\mathrm{Fo}=0{,}2$. Идентичность температур связана с тем, что зависимость температуры от времени, описываемая экспонентой, во всех формулах идентична. Следовательно, одинаковыми будут и собственные числа. Одинаковыми во всех формулах являются так же и координатные функции. Обнаруженный факт возможности принятия дополнительной функции не только на границах, как это делается в работах [43, 44, 51, 52], но и в любой точке пространства, имеет важное значение при решении задач, в которых температура на границах известна и, следовательно, дополнительная функция здесь не может быть принята. Это, например, задачи с переменным начальным условием, с несимметричными граничными условиями и др. Для таких задач в качестве дополнительной функции принимается не температура, а производная от нее (см. п. 2.3).

Используя решение (2.58), найдем такую мощность постоянного источника теплоты (положив $\gamma=0$), при которой температура стенки в точке $\xi=1$ в стационарном состоянии будет равна $1000\,^{\circ}\mathrm{C}$. Постоянную β следует принять такой, чтобы коэффициент теплопроводности, определяемый по формуле (2.41),

при $T = 1000\,^{\circ}\mathrm{C}$ увеличивался в два раза, то есть $\beta = 0{,}001$. Положив в формуле (2.58) $\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 1$, при $\gamma = 0$ и $\beta = 0{,}001$ находим соответствующее число Померанцева (следовательно, мощность внутреннего источника теплоты), при котором температура в точке $\xi = 1$ достигается $\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 1$ за время, равное $1\,мин$ ($\mathrm{Fo} = a\tau/\delta^2 = 2{,}4$; $a = 1\cdot 10^{-6}\ м^2/с$; $t_1 = 1000\,^{\circ}\mathrm{C}$; $t_0 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$; $\lambda_0 = 20\ Вт/(м\cdot К)$; $\delta = 0{,}005\,м$). Полученное таким путем число Померанцева будет: $\mathrm{Po} = 3{,}2030\cdot 10^{-5}$. Отсюда $\omega_0 = 25111{,}51 Вт/м^3 \approx 25\ кВт/м^3$ (п. п. 4.4).

Таблица 1. Результаты расчётов по формулам (2.58), (2.70), (2.71), (2.72)

Точка задания $q(\mathrm{Fo})$	$\gamma = 1;\ \beta = 0{,}1;\ \mathrm{Po} = 0{,}1;\ \Delta t = 10$ Формулы для температуры ((2.58), (2.70), (2.71), (2.72))	Результаты расчетов для точки $\xi = 0{,}5$ при $\mathrm{Fo} = 0{,}2$
$\xi = 0{,}25$	$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \left(\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{2\pi\mathrm{Po}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} + 2C\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4}+\gamma\mathrm{Po}\Delta t-\frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]\right)\Big/\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (2.58)	0,759
$\xi = 0{,}5$	$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{\pi\sqrt{2}\mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} + C_1\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4}+\gamma\mathrm{Po}\Delta t-\frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]+1$ (2.70)	0,759
$\xi = 0{,}75$	$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \left(\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{2\pi\mathrm{Po}\sqrt{\sqrt{2}+2}\,(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} + 2C_2\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4}+\gamma\mathrm{Po}\Delta t-\frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]\right)\Big/\sqrt{\sqrt{2}+2}$ (2.71)	0,759
$\xi = 1{,}0$	$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\cdot\left[\frac{2\pi\mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2+\pi^2\beta\Delta t-4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} + C_3\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4}+\gamma\mathrm{Po}\Delta t-\frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]+1$ (2.72)	0,759

Решение подобной задачи может быть использовано при электромагнитном способе прогрева реактора пиролиза метана (термического разложения на водород и углерод) с целью недопущения его перегрева и плавления, что

наблюдалось при конкретной работе реактора с электромагнитным прогревом его стенки.

Выводы

1. Используя дополнительную функцию и условия на границе, получено решение нелинейной задачи с температурно-зависящим источником теплоты. Дополнительная функция приводит уравнение в частных производных к временно́му обыкновенному уравнению, из решения которого находятся собственные числа, которые совпадают для линейной задачи с точными их значениями. Использование дополнительных условий на границе позволяет избежать непосредственное интегрирование исходного уравнения по пространственной переменной.

2. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением приводило к выполнению исходного уравнения в граничных точках. Выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и во всем диапазоне пространственной переменной, с точностью, зависящей от числа приближений – числа используемых дополнительных условий.

3. Дополнительные функции и граничные условия не изменяют исходную математическую постановку задачи, так как они являются выполняемыми и при любом другом методе получения решения. Их отдельное рассмотрение позволяет упростить как процесс получения решения, так и окончательную формулу для него.

4. Полученное решение уже в первом приближении позволяет отделить стационарные режимы теплообмена от режимов теплового взрыва – неограниченного увеличения температуры, которое происходит при положительном первом собственном числе.

2.3. Дополнительные функции и дополнительные условия на границе в нелинейных задачах теплопроводности

В приведённой в предыдущем разделе задаче дополнительная искомое функция задавалось на границе либо в любой произвольной точке пространства. Однако при решении ряда задач, например, с переменным начальным условиям, с неоднородными граничными условиями первого рода и др. задание ДИФ в граничных точках не представляется возможным ввиду заданных в этих точках граничных условиях первого рода, неизменных во времени. В настоящем разделе применительно к решению такого вида задач в качестве задаваемой на границе ДИФ принимается производная от температуры в граничной точке.

При зависимости физических свойств и источника теплоты от температуры определяющие уравнения оказываются нелинейными. Их точные решения не удаётся получить [30, 31, 56, 42]. Для их решения используется интегральный метод теплового баланса, в котором выполнятся не уравнение, а его осреднённый аналог. Осреднение снижает точность решения, однако она может быть повышена при использовании дополнительных условий такого вида, чтобы их выполнение было адекватно выполнению исходного уравнения на границах [18, 49, 38, 95]. В работах [52, 95] путём доказательства соответствующих теорем показано, что выполнение уравнения на границах при большом числе приближений влечёт его выполнение и внутри рассматриваемой области с точностью, зависящей от числа используемых дополнительных условий на границе.

Дополнительная функция и дополнительные условия на границах не изменяют исходную математическую постановку задачи, так как они выполняются и при любом другом методе получения решения, не являясь объектом специального рассмотрения (в чём можно убедиться непосредственной подстановкой решения, полученного другим методом, в дополнительную функцию и дополнительные условия на границах).

В качестве конкретного примера рассмотрим краевую задачу в следующей математической постановке

$$c\rho\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(t)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right]+\omega(t)\quad(\tau>0;\ 0<x<\delta);\qquad(2.76)$$

$$t(x,0)=t_0;\quad(2.77)\qquad t(0,\tau)=t_1;\quad(2.78)\qquad \partial t(\delta,\tau)/\partial x=0,\qquad(2.79)$$

где t – температура; x – координата; τ – время, c; $\lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности; c – теплоемкость; ρ – плотность; t_0 – начальная температура; t_1 – температура при $x=0$ $(t_1>t_0)$; $\omega(t)$ – мощность зависящего от температуры внутреннего источника теплоты; δ – толщина пластины.

С целью упрощения получения решения примем начальную температуру за условный нуль температуры. Для этого обозначим: $T=t-t_0$. Задача (2.76) – (2.79) примет вид

$$c\rho\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right]+\omega(T)\qquad(\tau>0;\quad 0<x<\delta);\qquad(2.80)$$

$$T(x,0)=0;\quad(2.81)\qquad T(0,\tau)=\Delta t;\quad(2.82)\qquad \partial T(\delta,\tau)/\partial x=0,\qquad(2.83)$$

где $\Delta t=t_1-t_0$

Найдем решение при следующих зависимостях коэффициента теплопроводности и источника теплоты от температуры:

$$\lambda(T)=\lambda_0(1+\beta T);\qquad(2.84)\qquad \omega(T)=\omega_0(1+\gamma T),\qquad(2.85)$$

где λ_0, ω_0 – теплопроводность и мощность источника теплоты в случае $t=t_0$, то есть при $T=0$; γ, β имеют размерность (K^{-1}) – коэффициенты.

Согласно (2.84), (2.85) теплопроводность и мощность источника при увеличении температуры возрастают от некоторых их начальных значений λ_0 и ω_0 (при $T=0$). Постоянные γ и β характеризуют интенсивность возрастания $\lambda(T)$ и $\omega(T)$.

Уравнение (2.80), учитывая (2.84), (2.85), будет

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau}=a_0\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\beta T(x,\tau))\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right]+\frac{\omega_0}{c\rho}(1+\gamma T(x,\tau)),\qquad(2.86)$$

где $a_0=\lambda_0/c\rho$ – коэффициент температуропроводности при $T=0$.

Обозначим:

$$\Theta = T / \Delta t; \qquad \xi = x / \delta; \qquad \mathrm{Fo} = a_0 \tau / \delta^2, \tag{2.87}$$

где Θ, ξ, Fo – безразмерные температура, координата, время.

С учётом (2.87) задача примет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\beta \Delta t \Theta(\xi,\mathrm{Fo}))\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}\right] + \mathrm{Po}(1+\gamma \Delta t \Theta(\xi,\mathrm{Fo})); \tag{2.88}$$

$$(\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = 0; \tag{2.89}$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = 1; \tag{2.90}$$

$$\partial \Theta(1,\mathrm{Fo}) / \partial \xi = 0, \tag{2.91}$$

где $\mathrm{Po} = \dfrac{\omega_0 \delta^2}{\lambda_0 \Delta t}$ – число Померанцева; $\lambda_0 = a_0 c \rho$.

Введём дополнительную функцию $q(\mathrm{Fo})$ последовательно в точках: $\xi = 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75.$ Найдём сначала решение задачи при задании дополнительной функции в точке $\xi = 0$, то есть

$$q(\mathrm{Fo}) = -\left.\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}. \tag{2.92}$$

Функция $q(\mathrm{Fo})$ представляет отрицательный безразмерный градиент температуры на границе $\xi = 0.$ При получении решения любым другим методом градиент температуры может быть найден из (2.92), несмотря на то что он не является предметом отдельного рассмотрения. В настоящей работе он вводится с целью упрощения процесса получения решения сложной нелинейной задачи теплопроводности с температурно-зависящим источником теплоты.

Решение задачи примем в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\xi), \tag{2.93}$$

где $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n})$ – неизвестные функции, $\varphi_k(\xi)$ $(k = \overline{1,n})$ – координатные функции, определяемые по формуле

$$\varphi_k(\xi) = \sin(r\pi\xi/2), \quad (r = 2k-1). \tag{2.94}$$

Формула (2.93) удовлетворяет условиям (2.90), (2.91). Неизвестные $b_k(q)$ находятся из (2.92) и дополнительных условий, вывод которых представлен ниже.

Подставим (2.93) (с одним членом ряда) в (2.92)

$$q(\mathrm{Fo}) = b_1(q)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)_{\xi=0}. \qquad (2.95)$$

Определяя $b_k(q)$ из (2.95) и подставляя в (2.93), имеем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{2}{\pi}q(\mathrm{Fo})\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \qquad (2.96)$$

Потребуем, чтобы соотношение (2.96) удовлетворяло осредненному уравнению (2.88), то есть интегралу теплового баланса

$$\int_0^1 \left\{\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} - \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\beta\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo}))\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right] - \mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo}))\right\}d\xi = 0. \qquad (2.97)$$

Подставляя (2.96) в (2.97), для $q(\mathrm{Fo})$ получаем обыкновенное уравнение

$$\frac{4\gamma\mathrm{Po}\Delta t q(\mathrm{Fo})}{\pi^2} - q(\mathrm{Fo}) - \frac{4(dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo})}{\pi^2} - \beta\Delta t q(\mathrm{Fo}) - \gamma\mathrm{Po}\Delta\mathrm{t} - \mathrm{Po} = 0. \qquad (2.98)$$

Интеграл уравнения (2.98) будет

$$q(\mathrm{Fo}) = C\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma\mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right) - \frac{\pi^2\mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2 + \pi^2\beta\Delta t - 4\gamma\mathrm{Po}\Delta t}, \qquad (2.99)$$

где C – константа интегрирования.

Подставляя (2.99) в (2.96), имеем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \left(\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[\frac{2\pi^2\mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2 + \pi^2\beta\Delta t - 4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} - 2C\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma\mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]\right)\Big/\pi, \qquad (2.100)$$

где коэффициент при Fo под знаком экспоненты

$$\nu_1 = -\frac{\pi^2}{4} + \gamma\mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2}{4}\beta\Delta t \qquad (2.101)$$

представляет первое собственное число задачи (2.88) – (2.91).

Для определения постоянной интегрирования C найдем интеграл взвешенной невязки условия (2.89)

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi = 0. \qquad (2.102)$$

Подставив (2.100) в (2.102), для C получаем уравнение, из которого находим

$$C = \frac{\pi^2 \mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2 + \pi^2\beta\Delta t - 4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} + 2. \qquad (2.103)$$

Формулы (2.100) и (2.103) представляют первое приближение задачи (2.88) – (2.91). Оно точно удовлетворяет условиям (2.90), (2.91) и приближенно – уравнению (2.88) и условию (2.89). Если принять $\mathrm{Po} = 0$; $\gamma = 0$; $\beta = 0$, то получаем линейную задачу без источника теплоты. Решение (2.100) в этом случае принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{4}{\pi}\exp(-\nu_1^*\mathrm{Fo})\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \qquad (2.104)$$

где $\nu_1^* = \pi^2/4$ – первое собственное число линейной задачи без источника теплоты, совпадающее с точным его значением [60].

В классических методах собственные числа определяются из задачи Штурма – Лиувилля, определенной в области пространственных координат. Здесь они находятся из обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции, зависящей лишь от времени. Для линейных задач получаемые таким путём собственные числа, совпадают с точными их величинами. Следовательно, здесь используется другой метод их определения по сравнению с классическими методами.

Анализ результатов расчетов по формуле (2.104) в сравнении с точным решением [60] позволяет заключить, что их расхождение в чебышевской норме в точке $\xi = 0{,}8$ при $\mathrm{Fo} = 0{,}13$ не превышает 3% (рис. 2.6).

Соотношение (2.100) позволяет отделить стационарные режимы от режимов неограниченного возрастания температуры (теплового взрыва). В случае, если

коэффициент показателя экспоненты $(-\pi^2(1+\beta\Delta t)/4+\gamma \mathrm{Po}\Delta t)>0$, то при увеличении Fo температура будет неограниченно возрастать. При $(-\pi^2(1+\beta\Delta t)/4+\gamma \mathrm{Po}\Delta t)<0$ увеличение числа Fo приводит к стационарному режиму. Знак показателя экспоненты определяется значениями β, γ, Po, которые задаются в исходных данных.

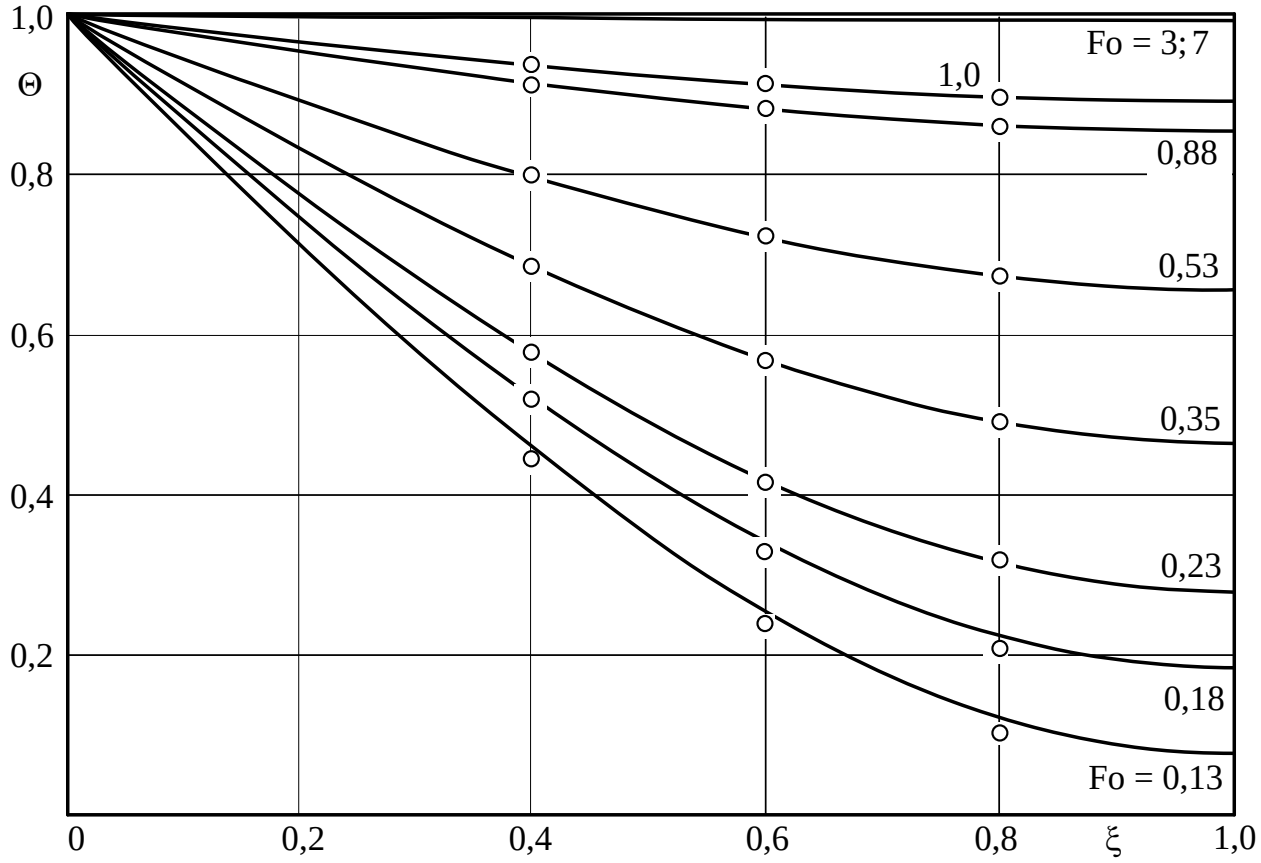


Рис. 2.6. Изменение температуры. ——— – по формуле (2.104);

◦ – точное решение [60]

На рис. 2.7 даны расчеты по формуле (2.100) при $\beta=0{,}1$; $\gamma=1$; $\mathrm{Po}=0{,}1$; $\Delta t=10$. Очевидно, что в данном случае показатель экспоненты отрицательный и при $\mathrm{Fo}>2$ практически устанавливается стационарное состояние. При исходных данных: $\beta=0{,}1$; $\gamma=0{,}1$; $\mathrm{Po}=5$; $\Delta t=10$ показатель экспоненты положительный и при $\mathrm{Fo}\to\infty$ температура устремляется к бесконечному значению (тепловой взрыв) (рис. 2.8).

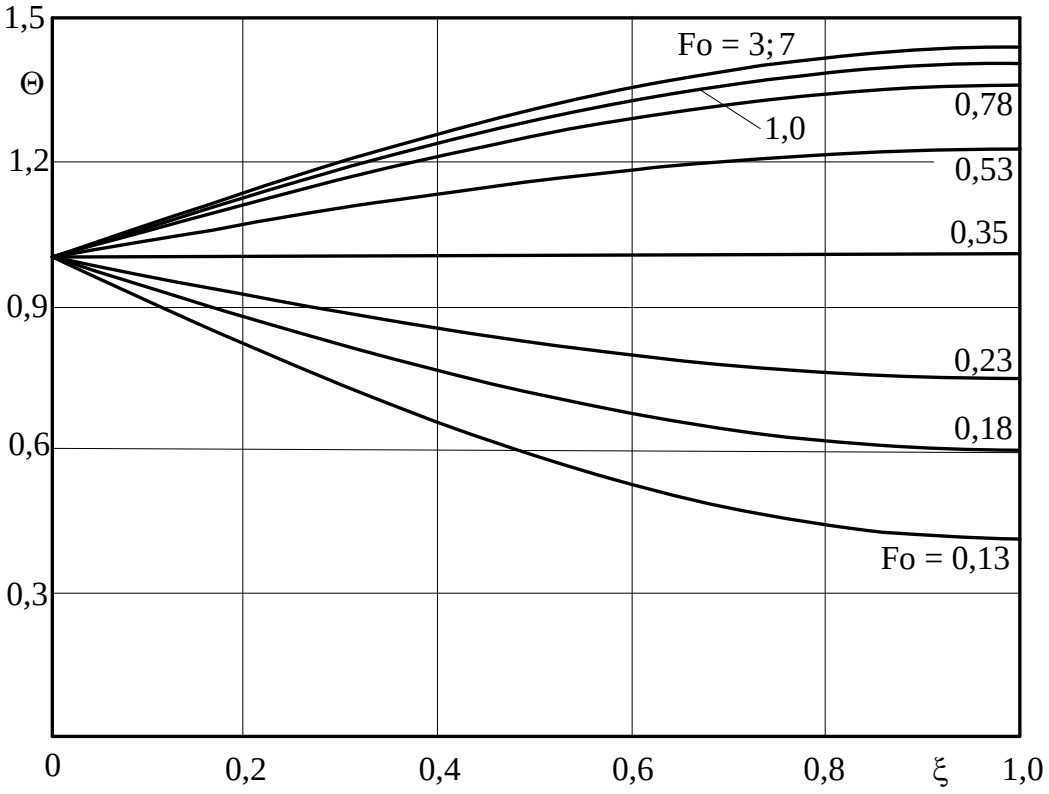


Рис. 2.7. Изменение температуры. ——— – по формуле (2.100).

$\gamma = 1;\ \beta = 0{,}1;\ \mathrm{Po} = 0{,}1;\ \Delta t = 10$

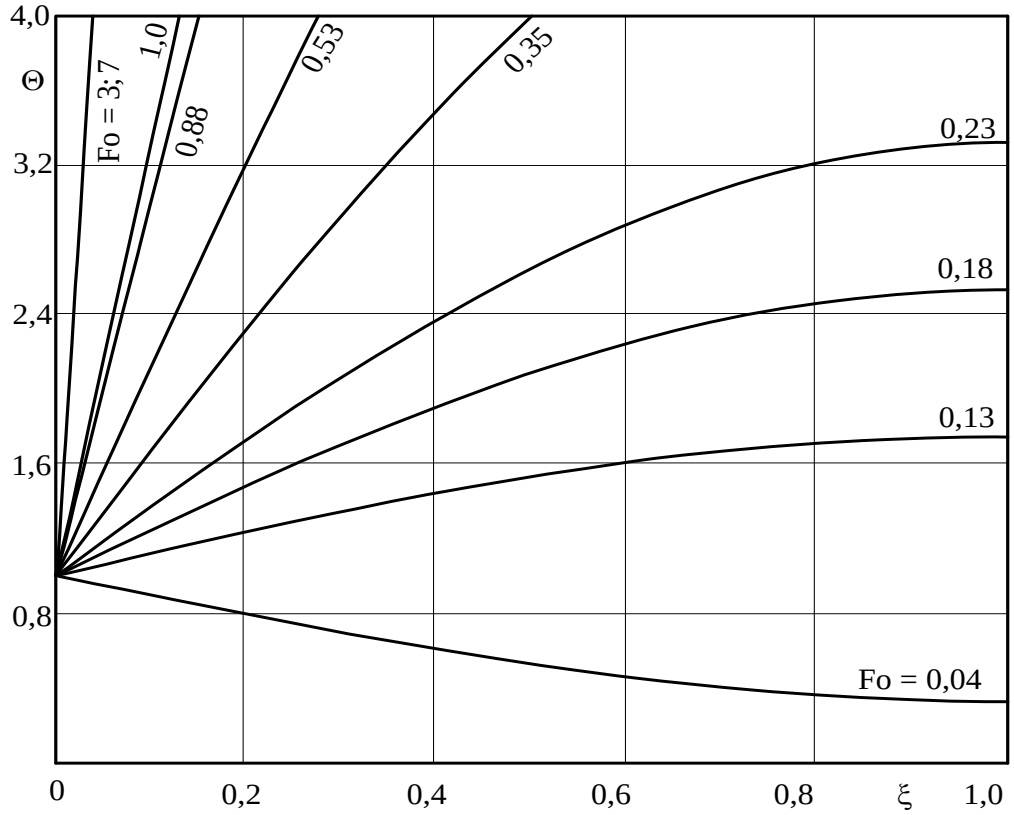


Рис. 2.8. Изменение температуры. ——— – по (2.100).

$\gamma = 0{,}1;\ \beta = 0{,}1;\ \mathrm{Po} = 5;\ \Delta t = 10$

Увеличение точности связано с увеличением числа членов решения (2.93), его неизвестные функции находятся из (2.92) и дополнительных условий, такого вида, чтобы в точках $\xi = 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$ выполнялось уравнение (2.88). Для их получения продифференцируем (2.90), (2.91), (2.92) по Fo:

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = 0;\quad (2.105) \qquad \frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}} = 0;\quad (2.106) \qquad \frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} = -\frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}.\quad (2.107)$$

Продифференцируем уравнение (2.88) по переменной ξ:

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\xi} = 3\beta\Delta t\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} +$$

$$+(1+\beta\Delta t\Theta(\xi,\mathrm{Fo}))\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3} + \mathrm{Po}\gamma\Delta t\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}.\quad (2.108)$$

Сопоставляя (2.105) с уравнением (2.88), учитывая (2.90), находим дополнительное условие в точке $\xi = 0$:

$$\beta\Delta t\left(\left.\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\right)^2 + (1+\beta\Delta t)\left.\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=0} + \mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t) = 0.\quad (2.109)$$

Сопоставляя (2.106) и (2.108), с учётом (2.91) находим дополнительное условие в точке $\xi = 1$:

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}\right|_{\xi=1} = 0.\quad (2.110)$$

Сопоставляя (2.107) и (2.108), находим ещё одно дополнительное условие в точке $\xi = 0$:

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = -\left.\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\cdot\left[3\beta\Delta t\left.\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=0} + \mathrm{Po}\gamma\Delta t\right] -$$

$$-(1+\beta\Delta t)\left.\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}\right|_{\xi=0}.\quad (2.111)$$

В случае, когда функция $q(\mathrm{Fo})$ задается в точках $\xi = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$, дополнительное условие (2.111) будет задаваться в этих точках. Выполнение

условий (2.109), (2.110), (2.111) адекватно выполнению уравнения (2.88) в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Для решения во втором приближении подставим (2.93) (при $n = 4$) в (2.92), (2.109), (2.110), (2.111). Относительно $b_k(q)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ получаем систему четырех уравнений. Подставляя (2.93), (с учётом $b_k(q)$) в (2.97), относительно $q(\mathrm{Fo})$ получаем обыкновенное уравнение. Дальнейшая последовательность получения решения повторяется (как и для первого приближения).

Задавая дополнительную функцию вида (2.92) в точках $\xi = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$ и повторяя выполненные выше математические выкладки, соответственно указанным точкам получаем следующие решения:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{\pi\sqrt{\sqrt{2}+2}} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[4C_1 \exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2 \beta \Delta t}{4} \right)\mathrm{Fo}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{4\pi^2 \mathrm{Po}(\gamma\Delta t + 1)\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\mathrm{Po}\gamma\Delta t} \right]; \quad (2.112)$$

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[C_2 \exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2 \beta \Delta t}{4} \right)\mathrm{Fo}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}\pi^2(\mathrm{Po} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t)}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\gamma\mathrm{Po}\Delta t} \right]; \quad (2.113)$$

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[4C_3 \exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2 \beta \Delta t}{4} \right)\mathrm{Fo}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{4\pi^2 \mathrm{Po}(\gamma\Delta t + 1)\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\mathrm{Po}\gamma\Delta t} \right]. \quad (2.114)$$

Константы интегрирования, определяемые из (2.89), соответственно решениям (2.112), (2.113), (2.114) имеют вид:

$$C_1 = \frac{\pi^2 \mathrm{Po}\sqrt{\sqrt{2}+2}(1+\gamma\Delta t)}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\mathrm{Po}\gamma\Delta t} + \sqrt{\sqrt{2}+2}, \quad (2.115)$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\pi^2 \mathrm{Po}}{2} + \pi^2 + \pi^2 \beta \Delta t - 4\gamma \mathrm{Po}\Delta t + \frac{\gamma \pi^2 \mathrm{Po}\Delta t}{2}\right)}{\pi^2(1+\beta\Delta t) - 4\gamma \mathrm{Po}\Delta t}, \qquad (2.116)$$

$$C_3 = \frac{\pi^2 \mathrm{Po}\sqrt{2-\sqrt{2}}(1+\gamma\Delta t)}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\mathrm{Po}\gamma\Delta t} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,. \qquad (2.117)$$

Расчёты температуры по формулам (2.100), (2.112), (2.113), (2.114) показывают их полную идентичность. В таблице 2 приведены результы расчетов безразмерной температуры по указанным формулам в точке $\xi = 0{,}5$ при $\mathrm{Fo} = 0{,}2$. Это связано с тем, что зависимость температуры от времени, описываемая экспонентой, во всех формулах идентична. Выполняя анализ причин идентичности решений, обнаруживаем, что расчет констант интегрирования по формулам (2.115), (2.116), (2.117) приводит к их одинаковым величинам. Одинаковыми оказываются и показатели экспонент, описывающие собственные числа краевой задачи. Учитывая, что зависимость по координате ξ описывается одинаковой координатной функцией $\varphi_k(\xi)$, приходим к заключению, что решения должны быть полностью идентичными. Обнаруженный факт возможности принятия дополнительной функции не только на границах, но и в любой точке пространства, имеет важное значение при решении задач с адиабатически изолированными границами ввиду того, что градиент температуры на границах в данном случае равен нулю. Это, например, задачи, в которых температура зависит лишь от внутренних источников теплоты и др.

Таблица 2. Результаты расчёта по формулам (2.100), (2.112), (2.113), (2.114)

Точка задания $q(\mathrm{Fo})$	$\gamma = 1;\ \beta = 0{,}1;\ \mathrm{Po} = 0{,}1;\ \Delta t = 10$ Формулы для температуры (см. формулы (2.100), (2.112) – (2.114))	Результаты расчетов для точки $\xi = 0{,}5$ при $\mathrm{Fo} = 0{,}2$
$\xi = 0$	$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \left(\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[\frac{2\pi^2 \mathrm{Po}(1+\gamma\Delta t)}{\pi^2 + \pi^2\beta\Delta t - 4\gamma\mathrm{Po}\Delta t} - 2C\exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma\mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2\beta\Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right)\right]\right)\Big/\pi$ (2.100)	0,759

Продолжение таблицы 2

$\xi = 0{,}25$	$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{\pi\sqrt{\sqrt{2}+2}} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[4C_1 \exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2 \beta \Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right) - \frac{4\pi^2 \mathrm{Po}(\gamma\Delta t + 1)\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\mathrm{Po}\gamma\Delta t}\right]$	(2.112)	0,759
$\xi = 0{,}5$	$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[C_2 \exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2 \beta \Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right) - \frac{\sqrt{2}\pi^2(\mathrm{Po} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t)}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\gamma \mathrm{Po}\Delta t}\right]$	(2.113)	0,759
$\xi = 0{,}75$	$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\left[4C_3 \exp\left(\left(-\frac{\pi^2}{4} + \gamma \mathrm{Po}\Delta t - \frac{\pi^2 \beta \Delta t}{4}\right)\mathrm{Fo}\right) - \frac{4\pi^2 \mathrm{Po}(\gamma\Delta t + 1)\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\pi^2(1+\beta\Delta t) - 8\mathrm{Po}\gamma\Delta t}\right]$	(2.114)	0,759

Выводы

1. Используя дополнительную функцию и дополнительные условия на границах, получено решение нелинейной задачи с температурно-зависящим тепловым источником. Дополнительная функция сводит исходное уравнение в частных производных к временно́му обыкновенному дифференциальному уравнению, из которого находятся собственные числа. Отметим, что в классических методах они находятся из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, определенной в области пространственной переменной. Следовательно, в настоящей работе рассматривается иной, более простой метод определения собственных чисел, позволяющий получать их точные значения (для линейных краевых задач). Для нелинейных задач более простой метод оказывается предпочтительнее классического.

2. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением приводило к выполнению исходного уравнения в граничных точках и в точках, где задается дополнительная функция, что приводит к его выполнению и внутри области. В данном случае удается избежать

непосредственное интегрирование исходного уравнения по пространственной переменной, ограничившись лишь выполнением интеграла теплового баланса.

3. Дополнительная функция и дополнительные условия на границах не изменяют исходную математическую постановку задачи, так как они являются выполняемыми и при любом другом методе получения решения. Их отдельное рассмотрение позволяет упростить как процесс получения решения, так и окончательную формулу для него.

4. Полученное решение уже в первом приближении позволяет отделить стационарные режимы теплообмена от режимов неограниченного возрастания температуры (теплового взрыва). Режим теплообмена определяется знаком первого собственного числа, зависящего от величин параметров характеризующих изменение физических свойств и источника теплоты от температуры. Тепловой взрыв наблюдается при положительной величине первого собственного числа.

5. Полученное в настоящем разделе решение можно использовать для исследования температурного состояния стенки реактора с учётом зависимости теплофизических свойств от температуры (при отсутствии внутренних источников теплоты). При наличии внутренних источников решается задача, связанная с индукционным нагревом реактора (см. п. 2.2).

2.4. Получение точного аналитического решения линейной задачи теплопроводности с постоянным внутренним источником теплоты

При индукционном прогреве реакторов пиролиза метана в их металлических стенках возникают внутренние источники теплоты, инициируемые электромагнитным полем, создаваемым индуктором. Теоретическая оценка их мощности представляет существенные трудности, связанные с необходимостью решения уравнений электромагнитного поля. В связи с чем, применением индукционного нагрева без решения уравнений электромагнитного поля в ряде случаев приводит к перегреву стенок реактора вплоть до их плавления на отдельных участках, если мощность источника превышает допустимые значения. Для предотвращения такого рода явлений возникает необходимость оценки мощности внутренних источников теплоты, инициируемых индуктором, не приводящих к указанным явлениям. Такая оценка может быть выполнена посредством анализа аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности с внутренним источником теплоты.

В настоящем разделе на основе дополнительных граничных условий (ДГУ) и дополнительной искомой функции (ДИФ) получено точное аналитическое решение задачи теплопроводности с источником теплоты. ДГУ позволяют выполнить уравнение краевой задачи на границах пластины, что приводит к его удовлетворению и по всей области пространственной переменной, не прибегая к непосредственному интегрированию по ней. Нахождение ДГУ связано с использованием основных граничных условий краевой задачи и исходного уравнения. Дифференцируя уравнение по координате, а дополнительные условия по времени, можно получить любое количество дополнительных условий. Дополнительная искомая функция описывает изменение температуры во времени в точке симметрии пластины. Так как температура в этой точке является искомой величиной краевой задачи, то ее отдельное рассмотрение никоим образом этой задачи не изменяет, а позволяет лишь значительно упростить процесс получения ее аналитического решения. Применение дополнительной функции приводит уравнение в частных производных к временно́му обыкновенному

дифференциальному уравнению. Из его решения находятся собственные числа, определяемые в классических методах решением краевой задачи Штурма – Лиувилля, заданной в пространственных переменных. Следовательно, в данном случае рассматривается другое направление определения собственных чисел.

В аналитической теории теплопроводности известны методы на основе интеграла теплового баланса, использование которого эквивалентно осреднению исходного дифференциального уравнения путём нахождения интеграла по пространственной переменной. Выполнение в каждом приближении осредненного уравнения приводит к низкой точности получаемых решений. Данная проблема является определяющей практически во всех приближенных аналитических методах: Ритца, Л. В. Канторовича, Галеркина, интегральном методе теплового баланса (Т. Гудмена, А. П. Ваничева, М. Био, и др.) [10, 18, 38, 44]. Она связана с низкой точностью нахождения собственных чисел и собственных функций, определяемых из выполнения дифференциального уравнения краевой задачи. Следовательно, повышение точности решения обусловлено увеличением точности его выполнения при наименьшем числе приближений. Точность решений этих методов может быть повышена выполнением уравнения на границах [38, 44]. В настоящей работе, используя ДГУ, получено точное решение задачи теплопроводности с источником теплоты путем выполнения уравнения в граничных точках, без его непосредственного интегрирования по пространственной координате.

Постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+\mathrm{Po}\quad(\mathrm{Fo}>0;\quad 0\le\xi<1);\tag{2.118}$$

$$\Theta(\xi,0)=0\ ;\tag{2.119}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0\ ;\tag{2.120}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo})=1\ ,\tag{2.121}$$

Обозначим:

$$\Theta = T/\Delta t\ , \qquad \xi = x/\delta\ , \qquad \mathrm{Fo} = a_0\tau/\delta^2\ , \qquad \mathrm{Po} = \frac{\omega_0\delta^2}{\lambda_0\Delta t}\ .$$

где Po – число Померанцева; Θ, ξ, Fo – безразмерные переменные (температура, координата, время).

Дополнительная искомая функция принимается в виде

$$q(\mathrm{Fo}) = \Theta\ (0, \mathrm{Fo}) \tag{2.122}$$

Решение задачи (2.118) – (2.121) принимается следующим

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\xi)\ . \tag{2.123}$$

где $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n})$ – неизвестные функции; $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ $(r = 2k-1)$.

Формула (2.123) удовлетворяет условиям (2.120), (2.121). Неизвестные $b_k(q)$ находятся из (2.122) и следующих ДГУ [38, 44]:

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \left.\frac{\partial^2\Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=0} + \mathrm{Po}\ ; \tag{2.124}$$

$$\partial^i\Theta(0, \mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 3,\ 5,\ 7, \ldots)\ ; \tag{2.125}$$

$$\partial^i\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 4,\ 6,\ 8, \ldots)\ ; \tag{2.126}$$

$$\frac{\partial^{2i}\Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^{2i}} = \frac{\partial^i q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^i} \quad (i = 2, 3, 4, \ldots)\ . \tag{2.127}$$

Очевидно, что основные граничные условия (2.120), (2.121) и ДГУ (2.125), (2.126) оказываются выполненными решением (2.123). Для определения функций $b_k(q)$, $(k = \overline{1,n})$ будем использовать соотношение (2.122) и ДГУ (2.124), (2.127).

В первом приближении, подставив (2.123) в (2.122), получаем: $b_1(q) = q(\mathrm{Fo}) - 1 - \mathrm{Po}/2$. Подставляя $b_1(q)$ в (2.123), имеем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + \left(q(\mathrm{Fo}) - 1 - \frac{\mathrm{Po}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\ . \tag{2.128}$$

Подставляя (2.128) в (2.118), получаем

$$\frac{8dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + 2\pi^2 q(\mathrm{Fo}) - \pi^2(2 + \mathrm{Po}) = 0\ . \tag{2.129}$$

Интегрируя (2.129) и подставляя полученное решение в (2.128), будем иметь

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) . \qquad (2.130)$$

Постоянная интегрирования C_1 находится из интеграла взвешенной невязки начального условия (2.119):

$$\int_0^1 \left[1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi = 0 . \qquad (2.131)$$

Определяя интегралы, находим

$$C_1 = -4(\pi^2 + 4\mathrm{Po})/\pi^3 . \qquad (2.132)$$

Формула (2.130) представляет решение задачи (2.118) – (2.121) в первом приближении. Оно точно удовлетворяет уравнению (2.118) и граничным условиям (2.120), (2.121). Приближённо в данном случае выполняется лишь начальное условие (2.119). Повышение точности его выполнения связано с увеличением числа членов ряда (2.123).

Во втором приближении, подставляя (2.123) ($n=2$) в (2.122) и (2.124), относительно $b_1(q)$ и $b_2(q)$ будем иметь систему двух алгебраических уравнений. После их определения соотношение (2.123) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + \left[\frac{q'}{2\pi^2} + \frac{9}{8}\left(q - 1 - \frac{\mathrm{Po}}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) +$$

$$+ \left[\frac{1}{8}\left(1 + \frac{\mathrm{Po}}{2} - q\right) - \frac{q'}{2\pi^2}\right]\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) . \qquad (2.133)$$

Подставляя (2.133) в уравнение (2.118), находим

$$\frac{16q''}{\pi^4} + \frac{40q'}{\pi^2} + 9\left(q - 1 - \frac{\mathrm{Po}}{2}\right) = 0 . \qquad (2.134)$$

Интегрируя уравнение (2.134) и подставляя полученное решение в (2.133), будем иметь

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1 e^{-\nu_1 \mathrm{Fo}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 e^{-\nu_2 \mathrm{Fo}}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) , \qquad (2.135)$$

где $\nu_1 = \pi^2/4$, $\nu_2 = 9\pi^2/4$ – собственные числа, совпадающие с точными их величинами [60]; C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Постоянные C_1 и C_2 находятся из начального условия (2.119) путём выполнения требования ортогональности его невязки к координатным функциям $\varphi_j(\xi) = \cos(j\pi\xi/2)$ ($j = r = 2k-1$; $k = 1,2$)

$$\int_0^1 \left[1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right)\right] \cos\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi = 0 \quad (j = 1,3). \quad (2.136)$$

Ввиду ортогональности косинусов, неизвестные в системе уравнений (2.136) разделяются (в каждое уравнение входит одно неизвестное). Их решения будут: $C_1 = -4(\pi^2 + 4\mathrm{Po})/\pi^3$; $C_2 = 4(9\pi^2 + 4\mathrm{Po})/(27\pi^3)$.

Подставляя C_1 и C_2 в (2.135), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) - \frac{4}{\pi^3}(\pi^2 + 4\mathrm{Po})\, e^{-\nu_1 \mathrm{Fo}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) +$$

$$+ \frac{4}{27\pi^3}(9\pi^2 + 4\mathrm{Po})\, e^{-\nu_2 \mathrm{Fo}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right), \quad (2.137)$$

В третьем приближении при нахождении коэффициентов $b_k(q)$, $(k = 1,2,3)$ используются условия (2.122), (2.124), (2.127) (при $i = 2$). Относительно $q(\mathrm{Fo})$ будем иметь обыкновенное уравнение третьего порядка, константы интегрирования которого находятся из начального условия (2.119). Решение краевой задачи (2.118) – (2.121) в третьем приближении будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + \sum_{k=1}^{n} A_k (1 + \mathrm{Po}/\nu_k^2) e^{-\nu_k^2 \mathrm{Fo}} \cos(\nu_k \xi), \quad (2.138)$$

где $A_k = 4(-1)^k/(r\pi)$; $\nu_k = r\pi/2$; $r = 2k-1$; $n = 3$.

Анализируя соотношение (2.138), можно заметить, что формулы для коэффициентов A_k и собственных чисел ν_k совпадают с точными формулами для них. Следовательно, при $n \to \infty$ формула (2.138) совпадает с точным аналитическим решением задачи (2.118) – (2.121) [60].

С целью подтверждения полученных в настоящей работе результатов докажем следующую теорему.

Теорема. *Если неизвестные функции* $b_k(q)$, $(k=\overline{0,n})$ *находить путём выполнения уравнения (2.118) и ДГУ, полученных в результате определения производных от него* k *– го порядка, то при большом числе приближений* $(n\to\infty)$ *оно будет выполняться и во всей области изменения* $0\le\xi\le1$, *не прибегая к его непосредственному интегрированию по переменной* ξ.

Для **доказательства** представим решение уравнения (2.118) в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=0}^{n}b_k(q(\mathrm{Fo}))\xi^k\ . \qquad (2.139)$$

Потребуем, чтобы решение (2.139) удовлетворяло уравнению (2.118) и ДГУ, полученным путём определения производных от него k – го порядка, в точке $\xi=0$

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\left(\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}-\mathrm{Po}\right)_{\xi=0}=0\ \ (k=\overline{0,n})\,. \qquad (2.140)$$

При $k=0$ соотношение (2.140) представляет уравнение (2.118), которое должно быть выполнено в точке $\xi=0$. При $k=1,2,3,\ldots,n$ оно приводится к следующим ДГУ

$$\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}\right)_{\xi=0}=0\ ;\ \left(\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^4\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^4}\right)_{\xi=0}=0\ ;$$

$$\left(\frac{\partial^4\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^5\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^5}\right)_{\xi=0}=0\ ;\ \ldots\ .$$

Общая формула для ДГУ, которые должны быть выполнены в точке $\xi=0$, включая уравнение (2.118), имеет вид

$$\left(\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}-\mathrm{Po}\right)_{\xi=0}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^{k+1}\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^k\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^{k+2}\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{k+2}}\right)_{\xi=0}=0\ \ (k=\overline{1,n})\,. \qquad (2.141)$$

Подставляя (2.139) в (2.141), для каждого $k=\overline{0,n}$, относительно $b_k(q(\mathrm{Fo}))$ получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{db_0}{d\mathrm{Fo}}-2b_2-\mathrm{Po}=0;\ \frac{db_1}{d\mathrm{Fo}}-6b_3=0;\ \frac{db_2}{d\mathrm{Fo}}-12b_4=0;\ \frac{db_3}{d\mathrm{Fo}}-20b_5=0;\ \ldots \quad (2.142)$$

Умножая уравнения (2.142) соответственно на ξ^k $(k=\overline{0,n})$ и суммируя полученные соотношения, имеем

$$\frac{db_0}{d\mathrm{Fo}}+\frac{db_1}{d\mathrm{Fo}}\xi+\frac{db_2}{d\mathrm{Fo}}\xi^2+\frac{db_3}{d\mathrm{Fo}}\xi^3+\ldots=$$

$$=2b_2+6b_3\xi+12b_4\xi^2+20b_5\xi^3+\ldots+\mathrm{Po}\ . \quad (2.143)$$

Подставляя (2.139) в уравнение (2.118), без привязки к конкретному ξ, получаем соотношение, аналогичное (2.143). Следовательно, выполняя (2.118) и ДГУ вида (2.141), при большом числе приближений $(n\to\infty)$ приходим к выполнению уравнения (2.118) и во всей области изменения $0\le\xi\le1$, минуя его непосредственное интегрирование по пространственной переменной – что и требовалось доказать, согласно сформулированной выше теореме. ■

Выводы

1. Найдено точное решение задачи теплопроводности с источником теплоты на основе определения ДГУ и ДИФ. ДГУ позволяют выполнить уравнение на границах, что приводит к его выполнению и внутри области, исключая интегрирование по пространственной координате. Использование ДИФ сводит уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению, из которого находятся собственные числа краевой задачи.

2. Постоянные интегрирования с заданной точностью находятся из начального условия методом наименьших квадратов.

3. Рассмотренный метод позволяет избежать вычисления сложных интегралов при удовлетворении дифференциального уравнения и начального условия, сводя эти операции к алгебраическим преобразованиям. При этом наиболее трудоемкая часть решения, связанная с решением систем алгебраических уравнений и

определением неизвестных коэффициентов, выполняется с использованием пакета прикладных программ Mathcad 15 при сохранении аналитической формы окончательного решения.

4. Ввиду отсутствия необходимости применения метода разделения переменных, разработанный в диссертации метод может быть применён к сложным краевым задачам, решения которых не могут быть получены с помощью классических методов (нелинейные, с переменными свойствами и др.).

5. Доказана теорема, согласно которой выполнение исходного дифференциального уравнения и дополнительных граничных условий в одной граничной точке $(\xi = 0)$ приводит к его выполнению и во всей рассматриваемой области $(0 \le \xi \le 1)$, не прибегая к его интегрированию по пространственной переменной

6. Полученное решение использовано для оценки мощности внутреннего источника теплоты (инициируемого при индукционном прогреве реактора), не приводящее к перегреву и плавлению стенки реактора пиролиза метана, см. п. 2.2).

2.5. Моделирование температуры стенки реактора пиролиза метана при переменных во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре среды

При нагреве метана с целью его пиролиза (термическое разложение без доступа кислорода) в газовой печи в диапазоне времени достижения стационарного состояния происходит существенное изменение во времени температуры дымовых газов (греющая среда) и коэффициента теплоотдачи на границе "стенка – среда". Коэффициент теплоотдачи в граничных условиях третьего рода характеризует интенсивность теплообмена между телом и окружающей средой. Обычно он принимается не зависящим от времени и температуры и определяется из эмпирических критериальных уравнений, исключающих влияние изменяющейся в нестационарном процессе температуры стенки. Однако экспериментальные данные показывают его существенную зависимость от времени [29, 112, 113, 128]. Закономерность этого изменения связана с неизвестной заранее температурой стенки, которая может быть найдена лишь в процессе получения решения краевой задачи. Следовательно, переменность коэффициента теплоотдачи от времени не может быть отражена точными аналитическими соотношениями, ввиду изменяющегося от времени температурного напора между телом и окружающей средой по неизвестному заранее закону. Исключение коэффициента теплоотдачи из рассмотрения возможно лишь путем решения задачи в сопряженной постановке при использовании граничных условий четвертого рода, задаваемых в виде равенства температур и тепловых потоков в точке контакта твердого тела со средой. Однако, ввиду необходимости определения температурного состояния и тела и среды, задача настолько усложняется, что получение её решения аналитическими методами крайне затруднительно. При решении третьей краевой задачи переменность коэффициента теплоотдачи от времени может быть оценена лишь приближенными соотношениями [29, 112, 113, 122, 128]. Задача значительно усложняется в случаях, когда наряду с коэффициентом теплоотдачи необходимо также учитывать и переменность во времени температуры окружающей среды. Решения таких задач классическими методами рассмотрены в работах [29, 116,

118, 119], где с помощью операционного метода уравнение теплопроводности сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, решение которого находится в виде ряда последовательных приближений.

Среди приближенных аналитических методов следует отметить интегральный метод теплового баланса, разработанный применительно к решению сложных нелинейных краевых задач [38, 52]. Его основной недостаток, связанный с низкой точностью, решается путем использования дополнительных граничных условий [38, 42, 52]. Из других методов получения приближенных аналитических решений следует отметить метод, а также метод, позволяющий сводить исходное дифференциальное уравнения к уравнению Фредгольма второго рода, и др.

Рассмотрим задачу теплопроводности для стенки реактора пиролиза метана с симметричными граничными условиями третьего рода при линейно изменяющихся во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре среды. Предложена одномерная математическая модель, согласно которой стенка моделируется плоской пластиной, имеет вид:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0;\ \ 0 < x < \delta)\ ; \tag{2.144}$$

$$T(x,0) = T_0\ ; \tag{2.145}$$

$$-\lambda\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = \alpha_0(1+\beta\tau)\left[T_{\text{ср.о}}(1+\gamma\tau) - T(0,\tau)\right]\ ; \tag{2.146}$$

$$\partial T(\delta,\tau)/\partial x = 0\ , \tag{2.147}$$

где T, x, τ – температура стенки, координата, время; T_0 – начальная температура стенки; $T_{\text{ср.о}}$ – температура среды при $\tau = 0$; λ, a – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; β, γ – коэффициенты, характеризующие изменение коэффициента теплоотдачи $\alpha(\tau) = \alpha_0(1+\beta\tau)$ и температуры среды $T_{\text{ср}}(\tau) = T_{\text{ср.о}}(1+\gamma\tau)$ от времени; α_0 – коэффициент теплоотдачи при $\tau = 0$; δ – толщина стенки.

В случае прогрева реактора пиролиза метана при отсутствии его расхода внутри реактора, ввиду низкой теплопроводности метана и незначительной величины коэффициента теплопроводности (условия естественной конвекции), с достаточной для инженерных приложений точностью в первом приближении можно использовать граничное условие (2.147) (на первой стадии это условие не используется, см. ниже задачу (2.153) – (2.156)).

Для приведения задачи (2.144) – (2.147) к безразмерному виду обозначим:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{ср.о}} - T_0} \; ; \quad \xi = \frac{x}{\delta} \; ; \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2} \; ; \quad \text{Bi}_0 = \frac{\alpha_0 \delta}{\lambda} \; , \tag{2.148}$$

где Θ, ξ, Fo – безразмерные температура, координата, время; Bi – число Био при $\tau = 0$.

Учитывая (2.148), задача (2.144) – (2.147) принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1) \; ; \tag{2.149}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0 \; ; \tag{2.150}$$

$$\frac{\partial \Theta(0,\text{Fo})}{\partial \xi} + \text{Bi}_0 (1 + \beta_1 \text{Fo}) \left[Q_1 (1 + \gamma_1 \text{Fo}) - \Theta(0,\text{Fo}) - Q_2 \right] = 0 \; ; \tag{2.151}$$

$$\partial \Theta(1,\text{Fo}) / \partial \xi = 0 \; , \tag{2.152}$$

где $\beta_1 = \beta \delta^2 / a$; $\gamma_1 = \gamma \delta^2 / a$; $Q_1 = \dfrac{T_{\text{ср.о}}}{T_{\text{ср.о}} - T_0}$; $Q_2 = \dfrac{T_0}{T_{\text{ср.о}} - T_0}$.

Следуя интегральному методу теплового баланса, решение задачи (2.149) – (2.152) разделим на две стадии во времени $(0 \le \text{Fo} \le \text{Fo}_1)$ и $(\text{Fo}_1 \le \text{Fo} < \infty)$, где Fo_1 – время достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$. На первой стадии вводится дополнительная искомая функция $q_1(\text{Fo})$, характеризующая перемещение фронта температурного возмущения. При $0 \le \text{Fo} \le \text{Fo}_1$ выполняется $0 \le q_1(\text{Fo}) \le 1$. В момент $\text{Fo} = \text{Fo}_1$ фронт достигает границы $\xi = 1$, то есть $q_1(\text{Fo}) = 1$. По сути, это движущаяся во времени граница прогретого и непрогретого слоёв, закон перемещения которой требуется определить. Математическая постановка задачи для первой стадии имеет вид:

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\quad(0<\mathrm{Fo}\le\mathrm{Fo}_1;\quad 0\le\xi\le q_1(\mathrm{Fo}))\,; \tag{2.153}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}_0(1+\beta_1\mathrm{Fo})\left[Q_1(1+\gamma_1\mathrm{Fo})-\Theta(0,\mathrm{Fo})-Q_2\right]=0\,; \tag{2.154}$$

$$\Theta(q_1(\mathrm{Fo}),\mathrm{Fo})=0\,; \tag{2.155}$$

$$\frac{\partial\Theta(q_1(\mathrm{Fo}),\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0\,, \tag{2.156}$$

где соотношения (2.155) и (2.156) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Согласно (2.155) температура на движущейся границе равна начальной температуре. Условие (2.156) обеспечивает плавность сопряжения температурной кривой $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ в точке $\xi=q_1(\mathrm{Fo})$ с линией начальной температуры $\Theta(\xi,0)=0$. В рамках принятого приближения за фронтом температурного возмущения стенка сохраняет начальную температуру: $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=0,\quad q_1(\mathrm{Fo})<\xi\le 1.$

На первой стадии процесса прогрева стенки, то есть до момента времени, когда фронт температурного возмущения (ФТВ) достигает координаты $\xi=1$, граничное условие (2.152) не оказывает влияния на процесс теплообмена. В данном случае происходит односторонний прогрев от некоторого постоянного начального значения температуры.

Необходимо отметить, что введение ФТВ означает постепенное проникновение теплоты – с конечной скоростью, несмотря на то что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности (2.153), описывающее бесконечную её скорость. Данное противоречие разрешается следующим образом. В работах [38, 52] показано, что возрастание скорости ФТВ может быть описано увеличением числа приближений n. И в пределе при $n\to\infty$ время достижения координаты $\xi=1$ $\mathrm{Fo}_1\to 0$, что подтверждает факт решения параболического уравнения теплопроводности. В связи с чем, число приближений следует ограничивать таким их количеством, при котором скорость перемещения ФТВ будет совпадать со скоростью тепловой волны, определяемой по формуле

$\vartheta = \sqrt{a / \tau_r}$, где τ_r – время релаксации; a – коэффициент температуропроводности [60].

Введение ФТВ используется как элемент приближенного построения решения, позволяющий описывать постепенное вовлечение области в процесс теплообмена при конечном числе членов аппроксимации. Поэтому положение ФТВ следует рассматривать как условную границу области, в которой температурное возмущение уже существенно проявляется в рамках принятого приближения.

При увеличении числа приближений (n) скорость перемещения ФТВ возрастает, а в предельном случае при $(n \to \infty)$ время достижения фронтом координаты $(\xi = 1)$ стремится к нулю. Тем самым приближенное описание согласуется с физико-математическим свойством параболического уравнения теплопроводности, для которого характерна бесконечная скорость распространения возмущения. Поэтому введение ФТВ не противоречит параболической постановке задачи, а служит способом построения приближенного решения с контролируемым числом членов разложения.

Начальным условием задачи (2.153) – (2.156) будет

$$q_1(0) = 0 \ . \tag{2.157}$$

Приближенное решение задачи (2.153) – (2.156) примем в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=0}^{n} b_k(q_1(\mathrm{Fo}))\varphi_k(\xi) \ , \tag{2.158}$$

где $b_k(q_1(\mathrm{Fo}))$ $(k = \overline{0, n})$ – неизвестные функции; $\varphi_k(\xi) = \xi^k$ – координатные функции.

Для определения $b_k(q_1(\mathrm{Fo}))$ $(k = \overline{0, n})$, используются основные (2.155), (2.156) и дополнительные граничные условия, определяемые следующим образом. Для получения ДГУ в точке $\xi = 0$ продифференцируем (2.154) по Fo:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial \xi \partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Bi}_0 \beta_1 \left[Q_1(1 + \gamma_1 \mathrm{Fo}) - \Theta(0, \mathrm{Fo}) - Q_2 \right] +$$

$$+\mathrm{Bi}_0(1+\beta_1\mathrm{Fo})\left[Q_1\gamma_1-\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right]=0\ . \qquad (2.159)$$

Продифференцируем уравнение (2.153) по ξ:

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}. \qquad (2.160)$$

Сравнивая (2.159) и (2.160) с учётом (2.153), получаем первое ДГУ в точке $\xi=0$:

$$\frac{\partial^3\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}+\mathrm{Bi}_0\beta_1\left[Q_1(1+\gamma_1\mathrm{Fo})-\Theta(0,\mathrm{Fo})-Q_2\right]+$$

$$+\mathrm{Bi}_0(1+\beta_1\mathrm{Fo})\left[Q_1\gamma_1-\frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\right]=0\ . \qquad (2.161)$$

Для получения второго ДГУ в точке $\xi=0$ необходимо продифференцировать (2.161) по Fo, а уравнение (2.153) – трижды по ξ. Из сравнения полученных результатов можно получить второе ДГУ в этой точке.

Общая формула для ДГУ в точке $\xi=q_1(\mathrm{Fo})$ имеет вид [12 – 14]

$$\partial^i\Theta(q_1(\mathrm{Fo}),\mathrm{Fo})/\partial\xi^i=0\ \ (i=2,3,4,\ldots)\ . \qquad (2.162)$$

Подстановка решения (2.158) в ДГУ (2.161), (2.162) эквивалентна выполнению в точках $\xi=0$ и $\xi=q_1(\mathrm{Fo})$ уравнения (2.153). В работах [52] доказываются теоремы, согласно которым выполнение уравнения на границе $\xi=0$ при большом числе приближений эквивалентно его выполнению и внутри рассматриваемой области без необходимости его непосредственного интегрирования по пространственной переменной. В отличие от [52], где приводится доказательство теоремы лишь при чётных степенях ξ в соотношении (2.158), распространим её доказательство для любых степеней ξ.

Теорема. *Если неизвестные функции* $b_k(q_1(\mathrm{Fo}))\ \ (k=\overline{0,n})$ *решения (2.158) находятся из выполнения уравнения (2.153) и соотношений, полученных после дифференцирования по пространственной переменной* ξ *этого уравнения, в*

точке $\xi = 0$, *то при* $n \to \infty$ *уравнение (2.153) будет удовлетворено решением (2.158) во всём диапазоне изменения пространственной переменной* $0 \le \xi \le 1$.

Доказательство. Потребуем, чтобы решение (2.158) удовлетворяло уравнению (2.153) и соотношениям, полученным дифференцированием до k – го порядка этого уравнения в точке $\xi = 0$:

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=0} = 0 \quad (k = 0,1,2,3,\ldots). \tag{2.163}$$

При $k = 0$ соотношение (2.163) сводится к уравнению (2.153). При $k = 1,2,3,\ldots$ оно представляет соотношения для производных k – ого порядка от уравнения (2.153), которые необходимо выполнить решением (2.158) в точке $\xi = 0$. Подставляя (2.158) в соотношения (2.163), вычисляя производные при $\xi = 0$ и разделив каждое равенство на k, получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{db_0}{d\mathrm{Fo}} - 2b_2 = 0 \;;\; \frac{db_1}{d\mathrm{Fo}} - 6b_3 = 0 \;;\; \frac{db_2}{d\mathrm{Fo}} - 12b_4 = 0 \;;\; \frac{db_3}{d\mathrm{Fo}} - 20b_5 = 0 \;;\; \ldots \tag{2.164}$$

Умножая соотношения (2.164) последовательно на ξ^k $(k = 0,1, \ldots, n)$ и суммируя полученные выражения, получаем

$$\frac{db_0}{d\mathrm{Fo}} + \frac{db_1}{d\mathrm{Fo}}\xi + \frac{db_2}{d\mathrm{Fo}}\xi^2 + \frac{db_3}{d\mathrm{Fo}}\xi^3 + \ldots =$$

$$= 2b_2 + 6b_3\xi + 12b_4\xi^2 + 20b_5\xi^3 + \ldots \tag{2.165}$$

Соотношение (2.165) представляет уравнение (2.153) после подстановки в него решения (2.158) (без привязки к какой – либо точке рассматриваемой области). Следовательно, если искомым решением удовлетворять уравнению (2.153) и производным от него k – ого порядка по переменной ξ в граничной точке $\xi = 0$, то при $k = \overline{1, n}$ и $n \to \infty$ уравнение (2.153) удовлетворяется всюду в рассматриваемой области, что и требовалось доказать по условиям теоремы. ■

Найдем решение задачи для первой стадии процесса интегральным методом теплового баланса с учетом дополнительных граничных условий. Неизвестные

функции $b_k(q(\mathrm{Fo}))$ $(k=\overline{1,n})$ решения (2.158) в первом приближении находятся из основных граничных условий (2.154) – (2.156). Подставляя (2.158), ограничиваясь тремя слагаемыми ряда в (2.154) – (2.156), относительно $b_k(q_1(\mathrm{Fo}))$ $(k=0,1,2)$ получаем систему трех алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} b_1+\mathrm{Bi}_0(1+\beta_1\mathrm{Fo})\left[Q_1(1+\gamma_1\mathrm{Fo})-b_0-Q_2\right]=0; \\ b_0+b_1q_1+b_2q_1^2=0; \\ b_1+2b_2q_1=0. \end{array}\right\} \qquad (2.166)$$

Решение системы уравнений (2.166) имеет вид

$b_0=(\mathrm{Bi}_0q_1(\eta_1-\eta_2))/\eta_3$; $b_1=-2(\mathrm{Bi}_0q_1(\eta_1-\eta_2))/\eta_3$; $b_2=(\mathrm{Bi}_0(\eta_1-\eta_2))/\eta_3$,

где $\eta_1=Q_1(1+\gamma_1\mathrm{Fo}+\beta_1\mathrm{Fo}+\gamma_1\beta_1\mathrm{Fo}^2)$; $\eta_2=Q_2(1+\beta_1\mathrm{Fo})$; $\eta_3=2q_1+\mathrm{Bi}_0q_1^2(1+\beta_1\mathrm{Fo})$.

Подставляя $b_k(q_1(\mathrm{Fo}))$ $(k=0,1,2)$ в (2.158), находим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\frac{\mathrm{Bi}_0(1+\beta_1\mathrm{Fo})(\xi-q_1)^2(Q_1(1+\gamma_1\mathrm{Fo})-Q_2)}{q_1(\mathrm{Bi}_0q_1(1+\beta_1\mathrm{Fo})+2)} \ . \qquad (2.167)$$

Потребуем, чтобы соотношение (2.167) удовлетворяло не уравнению (2.153), а его осредненному в пределах изменяющейся во времени толщины прогретого слоя аналогу, то есть интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^{q_1(\mathrm{Fo})}\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\xi=\int_0^{q_1(\mathrm{Fo})}\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}d\xi \ . \qquad (2.168)$$

Подставляя (2.167) в (2.168), после вычисления интегралов относительно $q_1(\mathrm{Fo})$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение $(\mathrm{Bi}_0=1;\ \beta_1=\gamma_1=0{,}1;\ T_{\text{ср.0}}=1000\,^\circ\mathrm{C};\ T_0=20\,^\circ\mathrm{C})$:

$$\frac{dq_1}{d\mathrm{Fo}}=\frac{r}{q_1(\mathrm{Fo}+10)(5\mathrm{Fo}+49)\left[(\mathrm{Fo}+10)q_1+40\right]}, \qquad (2.169)$$

где $r=0.294\left(102\mathrm{Fo}^2+2021\mathrm{Fo}+10000\right)\left[(\mathrm{Fo}+10)q_1+20\right]-\ 0.9996q_1^2\left[20(10\mathrm{Fo}+99)+\right.$
$\left.+5(\mathrm{Fo}+10)^2q_1\right]$.

Решение дифференциального уравнения (2.169) с начальным условием $q_1(0)=0$ получено в пакете прикладных программ Maple с учётом замены точного

начального условия приближенным $q_1(0)=10^{-10}$. Такая замена позволяет использовать классический метод интегрирования Рунге – Кутта 4 порядка точности вместо специальных методов, разрешающих особенность дифференциального уравнения в начальных условиях. Положив $q_1(\mathrm{Fo}_1)=1$, находим время окончания первой стадии процесса теплообмена $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_1=0{,}148$, то есть время, в течение которого ФТВ достигает координаты $\xi=1$.

Аппроксимируем полученное численное решение аналитической зависимостью. Для этого используем значения неизвестной функции в выбранных точках имеют вид:

$$q_1\left(\mathrm{Fo}=10^{-5}\right)=7{,}77\cdot10^{-3};\ q_1\left(\mathrm{Fo}=10^{-3}\right)=7{,}8\cdot10^{-2};\ q_1\left(\mathrm{Fo}=0{,}148\right)=1{,}0.$$

Выберем аппроксимационную функцию $q_1(\mathrm{Fo})$ в виде:

$$q_1(\mathrm{Fo})=c_1\mathrm{Fo}^{c_2}+c_3\mathrm{Fo} \qquad (2.170)$$

Подставляя значения функции в уравнение (2.170), получим систему нелинейных уравнений, неизвестные коэффициенты которой получены в пакете Maple стандартной процедурой численного решения fsolve.

Коэффициенты принимают значения:

$$c_1=2{,}453;\ c_2=0{,}5;\ c_3=0{,}372.$$

Таким образом, приближенное решение исходного уравнения в диапазоне чисел Fo от 0 до 0,148 можно представить в виде аналитической зависимости (2.170).

На рис. 2.9 показано сравнение численного решения (маркеры) с решением, полученным по аппроксимационной формуле. Апостериорный анализ разницы численного решения и решения по аппроксимационной зависимости показывает отличие менее 1 % в норме Чебышева.

Соотношение (2.170), удовлетворяя начальному условию (2.157), описывает перемещение фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo.

Отметим, что в диапазоне $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1 = 0{,}148$ невязка уравнения (2.169) практически равна нулю. Следовательно, соотношение (2.170) с большой степенью точности аппроксимирует численное решение уравнения (2.169).

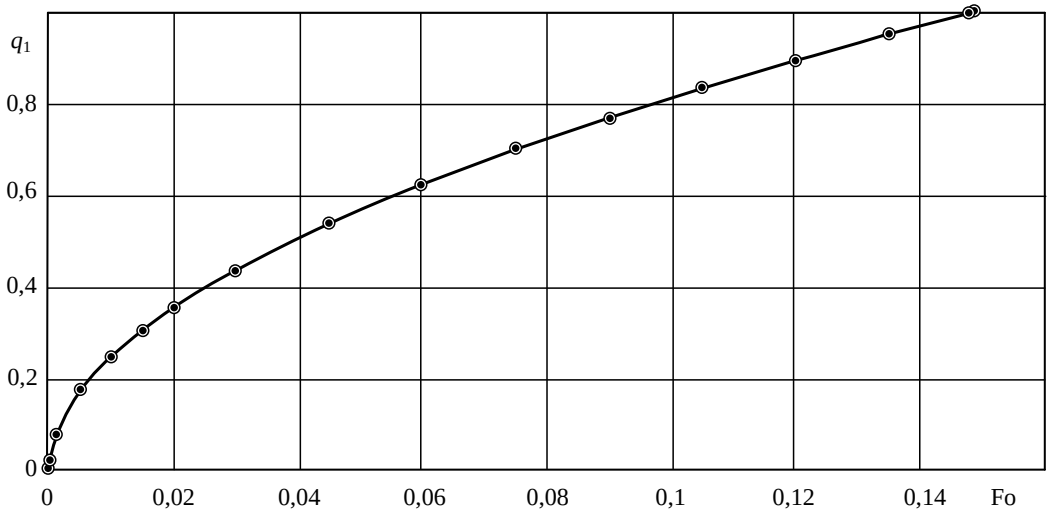


Рис. 2.9. Сравнение численного решения и решения по аппроксимационному многочлену (2.170) на первой стадии процесса. ● – численное решение; —○— – аппроксимация

Подставляя (2.170) в (2.167), находим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{Bi}_0\left(1+\beta_1\mathrm{Fo}\right)\left[\mathrm{Q}_1\left(1+\gamma_1\mathrm{Fo}\right)-\mathrm{Q}_2\right]\left[\xi-\delta(\mathrm{Fo})\right]^2}{\delta(\mathrm{Fo})\left[2+\mathrm{Bi}_0\left(1+\beta_1\mathrm{Fo}\right)\delta(\mathrm{Fo})\right]}. \qquad (2.171)$$

где $\delta(\mathrm{Fo}) = 0.372\,\mathrm{Fo} + 2.453\sqrt{\mathrm{Fo}}$.

Соотношение (2.171) представляет решение задачи (2.153) – (2.156) в первом приближении. Оно описывает температурное состояние стенки реактора пиролиза метана до момента времени $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$. Результаты расчётов приведены на рис. 2.10. Исходные данные для решения задачи были следующие: $\mathrm{Bi}_0 = 1$; $\beta_1 = \gamma_1 = 0{,}1$; $T_0 = 20\,°C$; $T_{\text{ср.0}} = 1000\,°\mathrm{C}$. С целью сравнения с точным решением [60] по формуле (2.171) были выполнены расчёты при $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, то есть при постоянных коэффициентах теплоотдачи и температуре среды (рис. 2.11). Из их

анализа следует, что в диапазоне $0{,}01 \le \mathrm{Fo} < \mathrm{Fo}_1 = 0{,}148$ расхождение результатов не превышает $2\,\%$ в норме Чебышева.

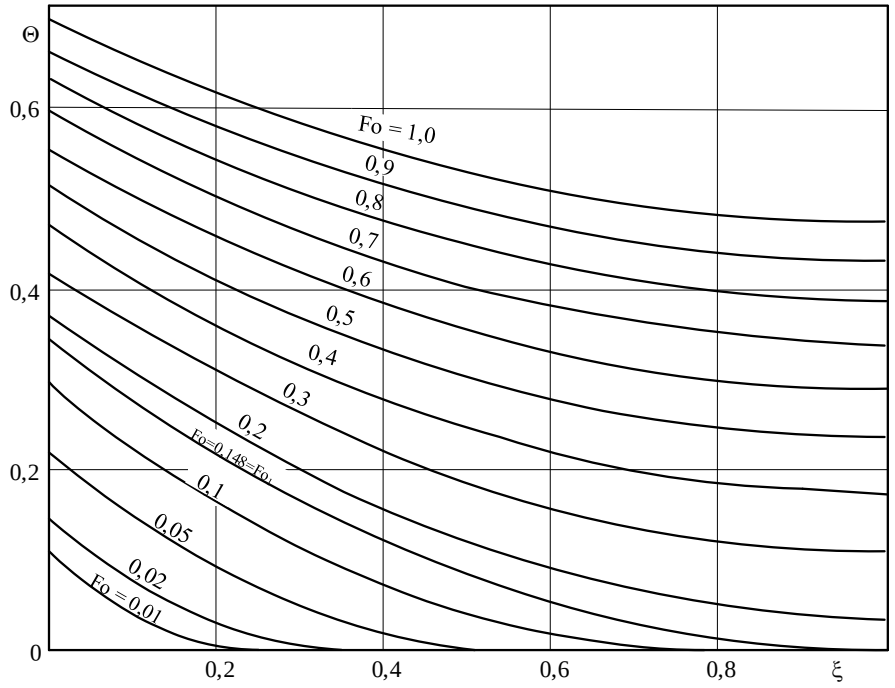


Рис. 2.10. Изменение температуры в первой $0{,}01 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}148$ и во второй $0{,}148 \le \mathrm{Fo} \le 1{,}0$ стадиях процесса. Расчёт по формулам (2.171) и (2.182). $\mathrm{Bi}_0 = 1$; $\beta_1 = \gamma_1 = 0{,}1$

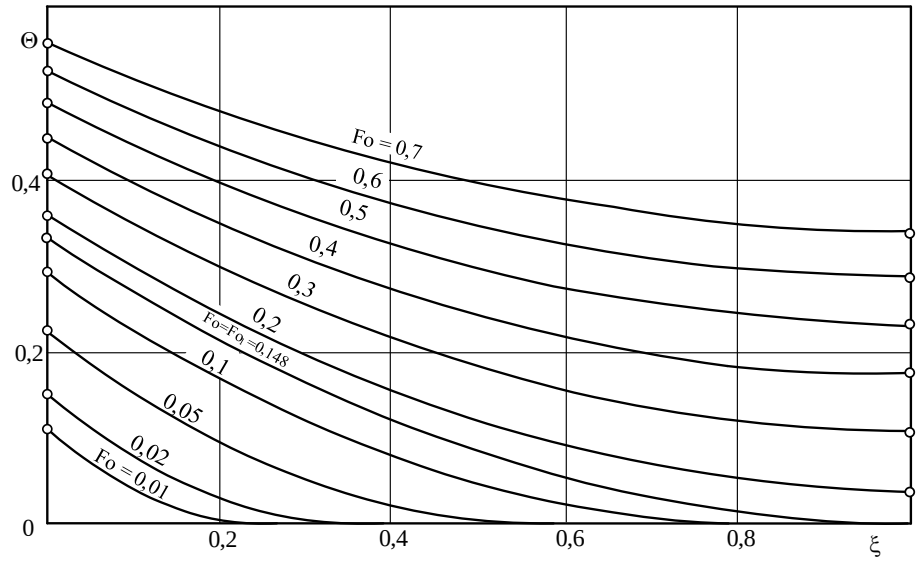


Рис. 2.11. Изменение температуры. ——— – расчёт по формулам (2.171) ($0{,}01 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1 = 0{,}148$) и (2.191) ($\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}7$). ○ – точное решение [60]; $\mathrm{Bi}_0 = 1$; $\beta_1 = \gamma_1 = 0$

На второй стадии процесса теплообмена понятие ФТВ теряет смысл, и температура изменяется по всей толщине пластины. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\qquad(\mathrm{Fo}_1\le\mathrm{Fo}<\infty;\quad 0<\xi<1)\ ; \tag{2.172}$$

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}_1)=0{,}342(\xi-1)^2\ ; \tag{2.173}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}_0(1+\beta_1\mathrm{Fo})\left[Q_1(1+\gamma_1\mathrm{Fo})-\Theta(0,\mathrm{Fo})-Q_2\right]=0\ ; \tag{2.174}$$

где $\beta_1=\frac{\beta\delta^2}{a}$, $\gamma_1=\frac{\gamma\delta^2}{a}$, $Q_1=\frac{T_{\text{ср.0}}}{T_{\text{ср.0}}-T_0}$, $Q_2=\frac{T_0}{T_{\text{ср.0}}-T_0}$.

$$\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi=0\ , \tag{2.175}$$

где соотношение для начального условия (2.173) получено из (2.171) и описывает изменение температуры по толщине стенки в момент времени $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_1$, т. е. распределение температуры по толщине стенки в конечный момент времени первой стадии процесса является начальным условием для второй стадии.

Применительно к этой стадии вводится новая дополнительная искомая функция ($q_2(\mathrm{Fo})$):

$$\Theta(1,\mathrm{Fo})=q_2(\mathrm{Fo})\ , \tag{2.176}$$

характеризующая изменение температуры во времени в точке $\xi=1$.

Задача (2.172) – (2.175) имеет переменное по координате ξ начальное условие (2.173). Её приближенное решение будем находить в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=0}^{n}a_k(q_2)\varphi_k(\xi)\ , \tag{2.177}$$

где $a_k(q_2)$ – неизвестные функции; $\varphi_k(\xi)=\xi^k$ $(k=0,1,\ldots,n)$ – координатные функции.

Неизвестные $a_k(q_2)$ $(k=0,1,2)$ находятся из основных граничных условий (2.174), (2.175), соотношения (2.176) и из дополнительных граничных условий.

Первое ДГУ в точке $\xi = 0$ остаётся неизменным и определяется формулой (2.161). Общие соотношения для ДГУ в точке $\xi = 1$ имеют вид [38, 52]:

$$\frac{\partial^i \Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^i} = 0 \qquad (i = 3, 5, 7, ...); \tag{2.178}$$

$$\frac{\partial^{2j} \Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^{2j}} = \frac{\partial^j q_2(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^j} \qquad (j = 1, 2, 3, ...). \tag{2.179}$$

Для получения решения в первом приближении подставляем (2.177) (при $n = 2$) в (2.174) – (2.176) и относительно $a_k(q_2)$ ($k = 0,1,2$) получаем систему трёх алгебраических линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 + \mathrm{Bi}_0 Q_1 (1 + \gamma_1 \mathrm{Fo} + \beta_1 \mathrm{Fo} + \beta_1 \gamma_1 \mathrm{Fo}^2) - \mathrm{Bi}_0 (Q_2 + a_0 + \mathrm{Fo} \beta_1 (Q_2 + a_0)) = 0; \\ &a_1 + 2a_2 = 0; \\ &a_0 + a_1 + a_2 - q_2(\mathrm{Fo}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.180}$$

Из решения системы уравнений (2.180) находим

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2q_2 + \mathrm{Bi}_0 (\eta_1 - \eta_2)}{\eta_4}; \\ a_1 &= -\frac{2\mathrm{Bi}_0 (\eta_1 - \eta_2) - 2\mathrm{Bi}_0 q_2 (1 + \beta_1 \mathrm{Fo})}{\eta_4}; \\ a_2 &= \frac{\mathrm{Bi}_0 \eta_1 - \mathrm{Bi}_0 (1 + \beta_1 \mathrm{Fo})(Q_2 + q_2)}{\eta_4}, \end{aligned}\right\} \tag{2.181}$$

где $\eta_1 = Q_1(1 + \gamma_1 \mathrm{Fo} + \beta_1 \mathrm{Fo} + \gamma_1 \beta_1 \mathrm{Fo}^2)$; $\eta_2 = Q_2(1 + \beta_1 \mathrm{Fo})$; $\eta_3 = 2q_1 + \mathrm{Bi}_0 q_1^2 (1 + \beta_1 \mathrm{Fo})$; $\eta_4 = 2 + \mathrm{Bi}_0 (1 + \beta_1 \mathrm{Fo})$.

Подставим (2.181) в (2.177):

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \frac{1}{\eta_4}(2q_2 + \mathrm{Bi}_0 (\eta_1 - \eta_2)) - \frac{1}{\eta_4}(2\mathrm{Bi}_0 (\eta_1 - \eta_2) - 2\mathrm{Bi}_0 q_2 (1 + \beta_1 \mathrm{Fo}))\xi +$$

$$+ \frac{1}{\eta_4}\left(\mathrm{Bi}_0 \eta_1 - \mathrm{Bi}_0 (1 + \beta_1 \mathrm{Fo})(Q_2 + q_2)\right)\xi^2 . \tag{2.182}$$

Интеграл теплового баланса для второй стадии имеет вид

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} d\xi \ . \qquad (2.183)$$

Подставляя (2.182) (с учетом найденных $a_k(q_2)$, $k = 0,1,2$) в (2.183), после вычислений интегралов относительно $q_2(\mathrm{Fo})$ получаем следующее обыкновенное уравнение (при $\mathrm{Bi}_0 = 1$; $\beta_1 = \gamma_1 = 0,1$; $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$; $T_{\text{ср.0}} = 1000\,^\circ\mathrm{C}$):

$$\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}} + \frac{3\mathrm{Fo}^2 + 120\mathrm{Fo} + 890}{(\mathrm{Fo}+30)(\mathrm{Fo}+40)} q_2(\mathrm{Fo}) = \frac{30\mathrm{Fo}^3 + 1489\mathrm{Fo}^2 + 20460\mathrm{Fo} + 85720}{98(\mathrm{Fo}+30)(\mathrm{Fo}+40)}. \qquad (2.184)$$

Решение уравнения (2.184) при начальном условии $q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$ получено методом Рунге – Кутта 4 – го порядка в пакете прикладных программ Maple.

Далее выполнена аппроксимация полученного численного решения. Для этого, используя численное решение, выбираются значения аппроксимирующей функции в некоторых точках:

$$\begin{aligned} &q_2(\mathrm{Fo} = 0,148) = 0; \quad q_2(\mathrm{Fo} = 2) = 0,863; \\ &q_2(\mathrm{Fo} = 6) = 1,488; \quad q_2(\mathrm{Fo} = 10) = 1,915. \end{aligned} \qquad (2.185)$$

Значения производной неизвестной функции $\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}}$ в точках $\mathrm{Fo} = 0,148$ и $\mathrm{Fo} = 10$ следующие:

$$\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}}(\mathrm{Fo} = 0,148) = 0,748; \quad \frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}}(\mathrm{Fo} = 10) = 0,105. \qquad (2.186)$$

Представим неизвестную аппроксимирующую функцию в виде многочлена:

$$q_2(\mathrm{Fo}) = d_1\mathrm{Fo}^5 + d_2\mathrm{Fo}^4 + d_3\mathrm{Fo}^3 + d_4\mathrm{Fo}^2 + d_5\mathrm{Fo} + d_6 \ . \qquad (2.187)$$

Подставляя значения функции (2.185) в уравнение (2.187), а значения её производной (2.186) в соответствующее дифференциальное уравнение, получим СЛАУ, неизвестные коэффициенты которой d_i $(i = 1, 2, \ldots 6)$ получены в пакете Maple стандартными процедурами.

Коэффициенты принимают значения:

$$\begin{aligned} &d_1 = 8,44 \cdot 10^{-5}; \ d_2 = -2,79 \cdot 10^{-3}; \ d_3 = 0,036; \\ &d_4 = -0,222; \ d_5 = 0,812; \ d_6 = -0,115. \end{aligned} \qquad (2.188)$$

Таким образом, приближенное решение исходного уравнения в диапазоне чисел Fo от 0,148 до 10 можно представить в виде многочлена (2.187) с параметрами (2.188).

На рис. 2.12 показано сравнение численного решения (маркеры) с решением, полученным по аппроксимационной формуле. Апостериорный анализ разницы численного решения и решения по аппроксимационной зависимости показывает отличие не более 1,2 % в норме Чебышева.

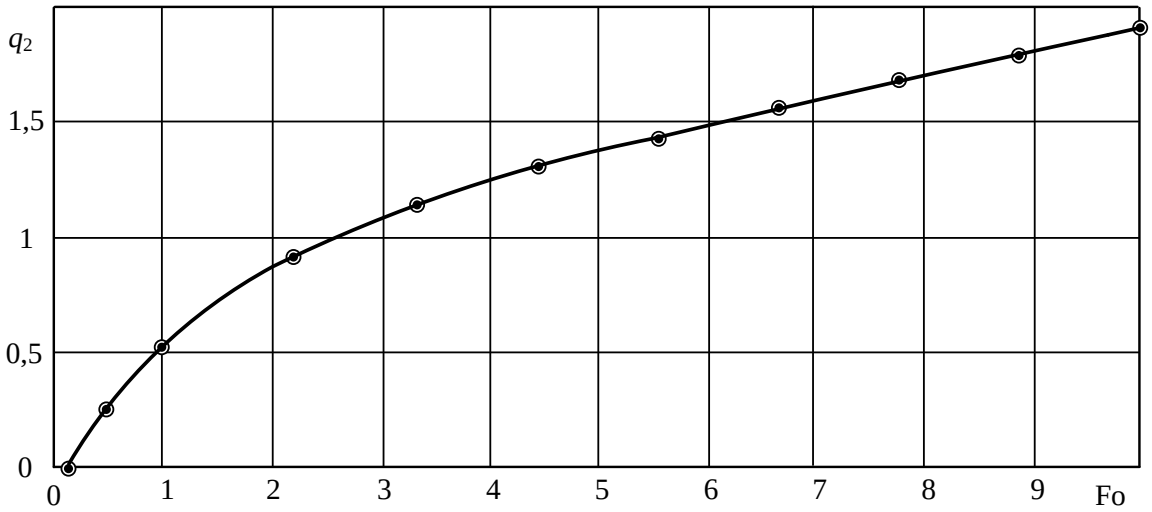


Рис. 2.12. Сравнение численного решения и решения по аппроксимационному многочлену (2.187) на второй стадии процесса. ● – численное решение; —○— – аппроксимация

Следует отметить, что в соотношении (2.187) аппроксимационная зависимость строится по безразмерному времени Fo, поскольку дополнительная искомая функция $q_2(\mathrm{Fo})$ характеризует изменение температуры во времени в точке $\xi = 1$.

Для проверки монотонности полученной аппроксимационной зависимости рассмотрим ее производную:

$$\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}} = 5d_1\mathrm{Fo}^4 + 4d_2\mathrm{Fo}^3 + 3d_3\mathrm{Fo}^2 + 2d_4\mathrm{Fo} + d_5$$

Подстановка коэффициентов (2.188) показывает, что на интервале второй стадии процесса $0{,}148 \le \mathrm{Fo} \le 10$ производная $dq_2/d\mathrm{Fo}$ остается положительной. Минимальное значение производной на указанном интервале также больше нуля.

Следовательно, функция $q_2(\mathrm{Fo})$ является монотонно возрастающей, что соответствует физическому смыслу рассматриваемого процесса прогрева стенки реактора.

Соотношения (2.182), (2.187) представляют решение задачи (2.172) – (2.175) в первом приближении. Результаты расчётов по формуле (2.182) приведены на рис. 2.10. С целью сравнения полученного решения с точным решением [60] были выполнены расчёты при $\beta_1 = \gamma_1 = 0$. Формула (2.182) в этом случае принимает вид:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{Bi}_0 + 2q_2}{2 + \mathrm{Bi}_0} + \frac{2\mathrm{Bi}_0(q_2 - 1)}{2 + \mathrm{Bi}_0}\xi - \frac{\mathrm{Bi}_0(q_2 - 1)}{2 + \mathrm{Bi}_0}\xi^2. \qquad (2.189)$$

Подставляя (2.189) в (2.183), получаем следующее уравнение для $q_2(\mathrm{Fo})$:

$$\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}} = \frac{3\mathrm{Bi}_0}{3 + \mathrm{Bi}_0}(1 - q_2).$$

Его решение:

$$q_2(\mathrm{Fo}) = 1 - C\exp\left(-\frac{3\mathrm{Bi}_0\mathrm{Fo}}{3 + \mathrm{Bi}_0}\right), \qquad (2.190)$$

где C – постоянная интегрирования, которая находится из начального условия $q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$, имеет вид:

$$C = \exp\left(\frac{3\mathrm{Bi}_0\mathrm{Fo}_1}{3 + \mathrm{Bi}_0}\right).$$

Учитывая (2.189), (2.190) соотношение (2.189) будет:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{2 + \mathrm{Bi}_0}\exp\left[-\frac{3\mathrm{Bi}_0(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_1)}{3 + \mathrm{Bi}_0}\right](2 + 2\mathrm{Bi}_0\xi - \mathrm{Bi}_0\xi^2). \qquad (2.191)$$

Анализ результатов расчетов по формуле (2.191) позволяет заключить, что при $0{,}148 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}7$ они практически совпадают с точным решением (см. рис. 2.11).

Для повышения точности решений необходимо увеличить число членов рядов (2.158) (первая стадия) и (2.177) (вторая стадия). Неизвестные функции $b_k(q_1)$ и $a_k(q_2)$ $(k = \overline{1, n})$ находятся из основных соотношений (2.154) – (2.156) (первая стадия), соотношений (2.174), (2.175) (вторая стадия) и ДГУ (2.161),

(2.162) ($i=2,3$) (первая стадия) и (2.161), (2.178) ($i=3$), (2.179) ($i=1$) (вторая стадия).

Анализируя решение (2.171) для первой стадии процесса, можно заключить, что большее влияние на распределение температуры оказывает изменение во времени температуры среды по сравнению с изменением коэффициента теплоотдачи.

Исходные данные для выполнения конкретных расчётов взяты по реальным данным экспериментальной установки пиролиза метана, разработанной в молодёжной лаборатории «Нефтегазовые технологии производства водорода и графита» Самарского государственного технического университета: $T_0=20\,^{\circ}\mathrm{C}$; $T_{\text{ср.0}}=1000\,^{\circ}\mathrm{C}$; $a=10^{-6}\,\text{м}^2/\text{с}$; $\alpha_0=100\,\text{Вт}/\left(\text{м}^2\cdot\text{К}\right)$; $\lambda=10\,\text{Вт}/\left(\text{м}\cdot\text{К}\right)$; $\delta=0.1\,\text{м}$; $\beta_1=0.1$; $\gamma_1=0.1$.

Анализ результатов расчётов позволяет заключить, что при $\mathrm{Fo}=0.01$ ($\tau=100\,\text{с}$) поверхность стенки реактора при $\xi=0$ прогревается до температуры $T=128.72\,^{\circ}\mathrm{C}$. При $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_1=0.148$ ($\tau=1480\,\text{с}$) температура составляет $T=354.58\,^{\circ}\mathrm{C}$. При $\mathrm{Fo}=1$ ($\tau=10000\,\text{с}$) температура достигает $T=724.05\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Наиболее интенсивный прогрев наблюдается на начальном участке процесса: за первые $100\,\text{с}$ температура поверхности стенки возрастает от $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ до $137.6\,^{\circ}\mathrm{C}$, что соответствует среднему темпу прогрева около $70\,^{\circ}\mathrm{C}/\text{мин}$. Такой характер нагрева может приводить к возникновению динамических температурных напряжений, превышающих предел прочности материала. В качестве рекомендаций для снижения динамических напряжений, например, можно уменьшить $T_{\text{ср.0}}$, а также параметры β_1 и γ_1. Последние две величины определяются параметрами β и γ, задаваемыми в соотношениях для $\alpha(\tau)$ и $T_{\text{ср}}(\tau)$, и зависят от заранее установленного времени прогрева реактора до стационарного состояния, при температуре которого происходит пиролиз метана.

Выводы

На основе определения ДГУ и ДИФ получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для стенки реактора пиролиза метана при граничных условиях третьего рода с переменными во времени коэффициентом теплоотдачи и температурой среды. Решение задачи разделяется на две стадии по времени. ДИФ в обеих стадиях позволяет сводить исходное уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению. ДГУ находятся в таком виде, чтобы их выполнение в граничных точках приводило к выполнению в них исходного дифференциального уравнения. Приводится доказательство теоремы, согласно которой выполнение уравнения в граничных точках эквивалентно его выполнению во всей рассматриваемой области. Исследования полученного решения применительно к стенке реактора пиролиза метана показали, что наибольшее влияние на интенсивность прогрева оказывает изменение во времени температуры окружающей среды, определяющей скорость прогрева стенки. Высокие скорости прогрева стенки могут приводить к динамическим напряжениям, превышающим предел прочности для данного материала. В п.п. 2.5 даны рекомендации по увеличению времени прогрева реактора до температуры, необходимой для пиролиза метана, что позволяет исключить возникновение аварийных ситуаций. Это время заранее устанавливается путем соответствующей настройки электронного регулятора нагрева.

Глава 3. Разработка методов математического моделирования тепловых процессов в реакторе пиролиза и газовой печи

При получении водорода из метана путём его термического разложения сложной и пока ещё не решенной в промышленных установках проблемой является отложением углерода на внутренних поверхностях стенки реактора. Вследствие уменьшения внутреннего диаметра реактора уменьшается расход метана, снижается эффективность прогрева, увеличивается гидравлическое сопротивление. В процессе продолжительной работы отложения могут полностью перекрыть проходное сечение реактора вплоть до останова процесса пиролиза. Для решения этой проблемы необходимо исследование причин возникновения отложений углерода на стенках реактора. С этой целью в настоящей главе разработаны математические модели динамического и теплового пограничных слоев с учётом переменности вязкости и температуропроводности газа.

3.1. Формирование динамического пограничного слоя в реакторе пиролиза метана при переменной вязкости газа

Применительно к реактору пиролиза метана получено аналитическое решение задачи формирования динамического пограничного слоя при зависимости вязкости метана от температуры. Показано, что вблизи стенки реактора, нагретого до температуры 1000 °С, ввиду высокой вязкости нагретого до такой же температуры метана, образуется слой неподвижного газа. Формирование динамического пограничного слоя в данном случае происходит на некотором расстоянии от стенки, в пределах которого скорость газа практически равна нулю. Образующийся в неподвижном слое в результате пиролиза метана углерод (пиролизный графит) отлагается на стенках реактора, что приводит к уменьшению эффективности пиролиза ввиду затруднений, связанных с течением газа и его прогревом.

При течении газа на стенке, образуется динамический пограничный слой, в котором скорость изменяется от нуля на стенке до скорости невозмущенного потока [68, 84, 105]. В случае, если температура стенки выше температуры газа,

ввиду увеличения вязкости при увеличении температуры газа вблизи стенки образуется высоковязкий слой, течение которого затормаживается. В слое заторможенного газа, находящегося при высокой температуре, происходит его пиролиз, сопровождающийся разложением метана на водород и углерод. Образующийся углерод, отлагаясь на внутренних стенках реактора, снижает его производительность и эффективность прогрева метана. В связи с чем, возникает проблема удаления образовавшегося на стенках реактора углерода без остановки процесса пиролиза (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Газовый реактор пиролиза метана

Формулы температурной зависимости вязкости газа и конкретные примеры расчетов возрастания вязкости от температуры даны в [79], где, в частности, показано, что вязкость углекислого газа (при давлении 1 *атм*) возрастает от

$\nu = 0{,}0137\ спз$ при температуре $T = 0\ °C$ до $\nu = 0{,}0404\ спз$ при $T = 800\ °C$, [79], что свидетельствует о существенном влиянии температуры на вязкость газа.

Задача определения скорости в пограничном слое в случае линейной зависимости вязкости по его толщине $\nu(y) = \nu^*(1-\beta y)$ записывается в виде (ввиду большого диаметра канала, равного $\varphi = 8$ см и малой толщины стенки $\delta_1 = 2$ мм, рассматривается плоская задача)

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x}(Q_x - 1)\,Q_x dy = \gamma\left[\beta \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial Q_x}{\partial y}\,dy - \int_0^{\delta(x)} (1-\beta y)\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2}\,dy\right] \quad (x > 0\ ;\ 0 \le y \le \delta(x)); \qquad (3.1)$$

$$Q_x\big|_{y=0} = 0; \qquad (3.2) \qquad Q_x\big|_{y=\delta(x)} = 1; \qquad (3.3)$$

$$\left.\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0, \qquad (3.4) \qquad \left.\frac{\partial Q_x}{\partial y}\right|_{y=\delta(x)} = 0, \qquad (3.5)$$

где $\nu(y)$ – переменная от координаты y кинематическая вязкость; ν^* – кинематическая вязкость при $y = 0$ $(y < 1)$; β – постоянная $(\beta < 1)$; $Q_x = V_x / V$ – безразмерная скорость; V_x – скорость в пограничном слое; V – скорость невозмущенного потока; x – продольная координата; y – поперечная координата; ν – вязкость невозмущенного потока; $\delta(x)$ – толщина динамического пограничного слоя; $\gamma = \nu^* / V$.

Примем решение задачи (3.1) – (3.5) в виде

$$Q_x(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta(x))\varphi_k(y), \qquad (3.6)$$

где $a_k(\delta(x))$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y) = y^{2k-1}$ – координатные функции.

Соотношение (3.6) удовлетворяет условиям (3.2), (3.4). Коэффициенты $a_k(\delta)$ $(k = \overline{1,n})$ находятся из (3.3), (3.5) и дополнительного граничного условия вида

$$\left.\frac{\partial Q_x}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \qquad (3.7)$$

В третьем приближении, подставляя (3.6) (при трех членах ряда) в (3.3), (3.5), (3.7), для $a_k(\delta)$ $(k=1,2,3)$ имеем систему трех алгебраических уравнений. Ее решение: $a_1=0$; $a_2=5/(2\delta^3)$; $a_3=-3/(2\delta^5)$. Подставляя a_k в (3.6), находим

$$Q_x(x,y)=\frac{5}{2}\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^5. \qquad (3.8)$$

Подставив (3.8) в (3.1), для $\delta(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d\delta(x)}{dx}=\gamma\beta. \qquad (3.9)$$

Интегрируя (3.9) (при начальном условии $\delta(0)=0$), получаем

$$\delta(x)=\gamma\beta x. \qquad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.8) (при $\gamma=0{,}15\ м$, $\beta=0,2\ м^{-1}$), имеем

$$Q_x(x,y)=9{,}26\cdot10^4\left(\frac{y}{x}\right)^3-6{,}17\cdot10^7\left(\frac{y}{x}\right)^5. \qquad (3.11)$$

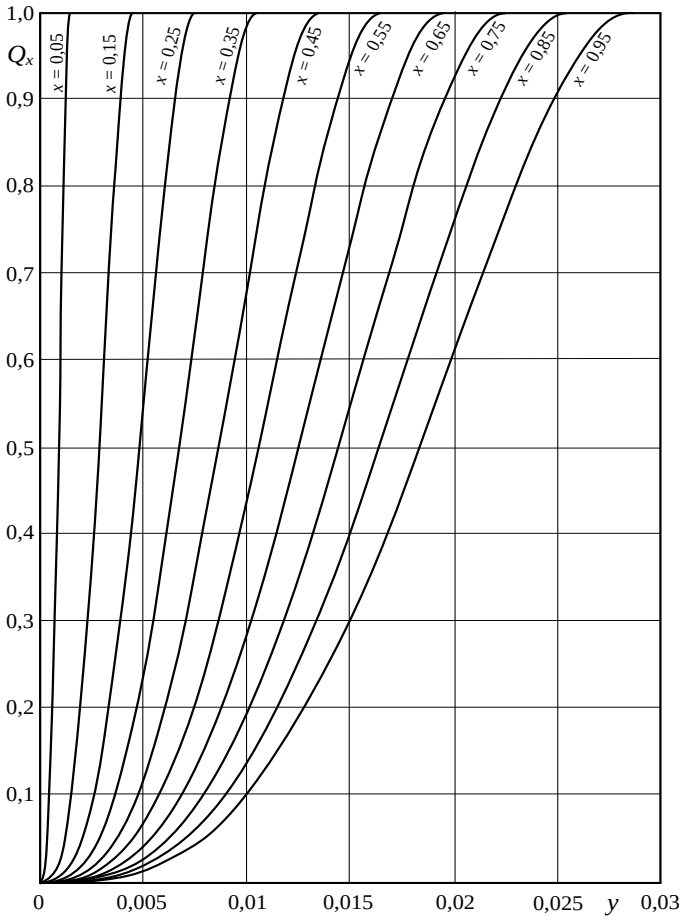


Рис. 3.2. Изменение скорости

Расчеты по (3.11) даны на рис. 3.2, из которого видно, что кривые скорости при $y = 0$ касательны к оси y. Следовательно, изотахи перпендикулярны к оси x и скорость здесь практически равна нулю. Следовательно, формирование пограничного слоя происходит за пределами застойного участка. В слое неподвижного метана происходит его пиролиз и отложение образующегося углерода на стенках реактора, внутренний диаметр которого уменьшается вплоть до полного перекрытия канала и прекращения подачи газа, то есть остановки процесса пиролиза.

Если положить $\beta = 0$ (постоянная вязкости), то решение задачи (3.1) – (3.5) для трех членов ряда (3.6) будет

$$Q_x(x, y) = \frac{5}{2}\frac{y}{\delta(x)} - 5\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3 + 5\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^5, \qquad (3.12)$$

где

$$\delta(x) = 4{,}53\sqrt{\frac{Vx}{\nu}}, \qquad (3.13)$$

где ν – вязкость невозмущенного потока.

Анализ расчетов по (3.12) в сравнении с точным решением [105] позволяет заключить, что их расхождение в чебышевской норме в точке $\eta = 4$ не превышает 3%.

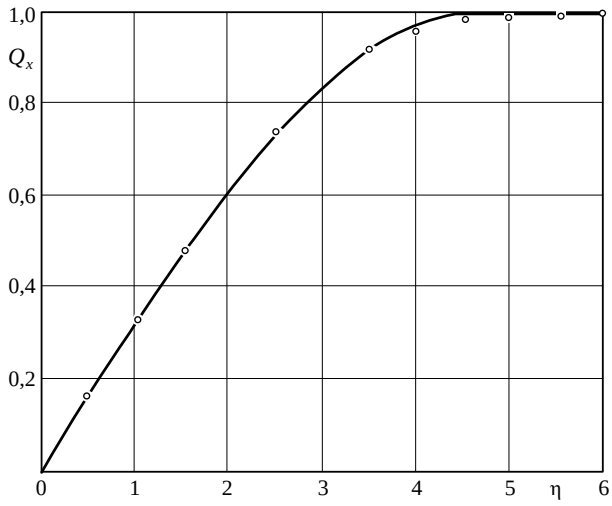


Рис. 3.3 Изменение безразмерной скорости Q_x от безразмерной переменной $\eta = y\sqrt{V/(\nu x)}$. —— – по формуле (3.12); ○ – точное решение [105]

Соотношение (3.12) ввиду полиномиальной зависимости скорости от координаты y позволяет найти линии изотах (одинаковых скоростей) по толщине динамического слоя (рис. 3.4). Задавая значения скорости Q_x, для различных x находятся такие y, которые удовлетворяют (3.12). Анализ изотах позволяет заключить, в точке $y = 0$ они перпендикулярны оси X.

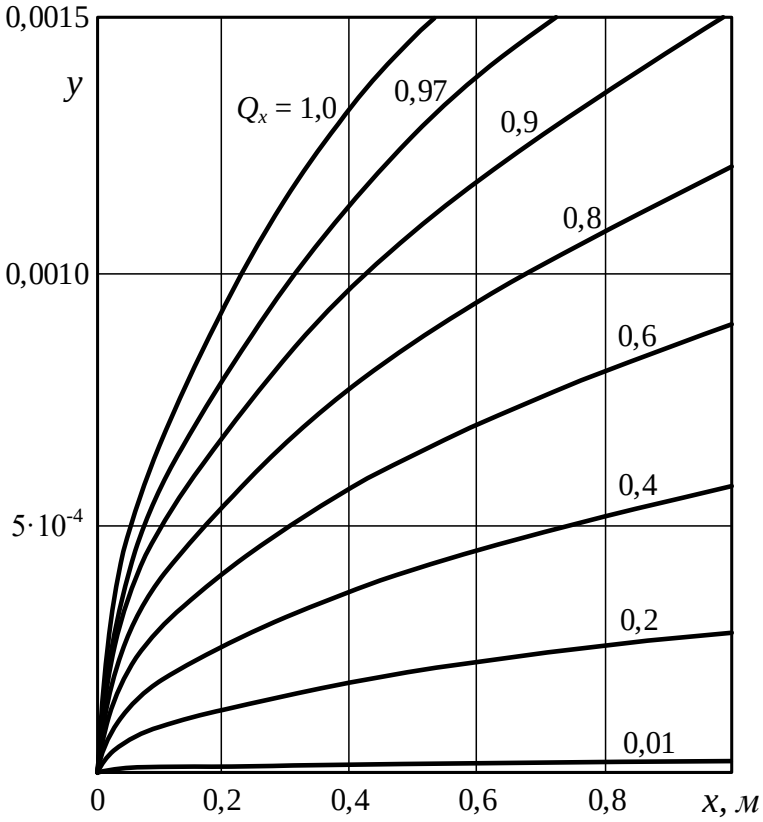


Рис. 3.4. Распределение изотах

После проведения процесса пиролиза метана был выполнен визуальный осмотр внутренней поверхности элемента реактора, на которой образовался слой пиролизного углерода (рис. 3.5). Осмотр показал наличие плотных углеродных отложений на стенке реактора и частичное уменьшение его проходного сечения. При рассмотрении отделившегося слоя установлено, что непосредственно у стенки углерод имеет более плотную структуру, тогда как по мере удаления от стенки слой становится более рыхлым. Данный результат качественно подтверждает полученный расчетный вывод о формировании пристеночной застойной зоны, в которой создаются условия для разложения метана и последующего отложения углерода.



Рис. 3.5. Отложения пиролизного углерода на внутренней поверхности элемента реактора после проведения процесса пиролиза метана

Выводы

1. Используя аналитическое решение математической модели динамического пограничного слоя при линейном изменении вязкости по его толщине, показано, что в процессе течения газа на стенках реактора пиролиза метана, ввиду увеличения вязкости с увеличением температуры, образуются застойные зоны. В них происходит разложение метана на водород и углерод. Часть образующегося углерода отлагается на стенках реактора, уменьшая его проходное сечение, вплоть до полной остановки процесса пиролиза.

2. Визуальный анализ образца пиролизного углерода, отложившегося на стенках реактора, показывает, что непосредственно на стенке углерод имеет более жесткую структуру, а на некотором удалении от нее переходит в более рыхлое состояние. Такая структура периферийного углерода, непосредственно соприкасающегося с движущимся метаном, создает условия для еще большего тормозящего эффекта на границе между слоем отложений и газом, способствуя тем самым еще более интенсивному росту отложений.

3.2. Тепловой и динамический пограничные слои при переменной вязкости и температуропроводности газа

Используя интегральный метод теплового баланса, получены аналитические решения задач формирования динамического и теплового пограничных слоев в реакторе пиролиза (термического разложения) метана при переменных вязкости и температуропроводности. Показано, что на стенке реактора, нагретого до температуры более 1000 ℃, вследствие высокой вязкости и температуропроводности образуется слой неподвижного газа, имеющего такую же температуру. Изотахи (линии одинаковых скоростей) и изотермы в этом слое расположены перпендикулярно поверхности стенки. Формирование пограничных слоев в данном случае происходит на некотором расстоянии от стенки, в пределах которого скорость практически равна нулю, а температура равна температуре стенки, значительно превышающей температуру газа за пределами пограничных слоев. В пристеночном слое неподвижного газа при высокой температуре происходит интенсивное образование углерода (пиролизного графита), отлагающегося на стенках реактора, вплоть до полного зауглероживания его проходного сечения и останова процесса пиролиза.

При течении сжимаемой или несжимаемой жидкости на стенке возникают две области: 1. Динамического пограничного слоя, в котором скорость изменяется от нуля на стенке до скорости невозмущенного потока на границе пограничного слоя. В этой области наиболее проявляется влияние сил вязкости; 2. Область невозмущенного потока, расположенную за пределами пограничного слоя, где влияние вязкости пренебрежимо мало при практическом отсутствии градиентов поперечных скоростей. При делении потока на две области значительно упрощается анализ течения в целом, так как каждую из выделенных областей можно исследовать раздельно. Для описания невозмущенного потока можно использовать уравнения идеальной (невязкой) жидкости ввиду значительного превышения инерционных сил по сравнению с силами вязкости [75, 105].

При отличающихся температурах жидкости и стенки образуется еще и тепловой пограничный слой, в котором температура изменяется от температуры

стенки до температуры невозмущенного потока. Соотношение толщин теплового и динамического слоев характеризуется критерием Прандтля. Для газов $(\mathrm{Pr} = 0,6;1)$ и несжимаемых жидкостей $(\mathrm{Pr} \geq 1)$ и следовательно толщины слоев практически равны. Для жидких металлов число Pr значительно меньше единицы и, поэтому, тепловой пограничный слой может проникать в область динамически невозмущенного потока.

При пиролизе метана в обогреваемом внешним источником теплоты металлическом реакторе температура стенки значительно больше температуры газа. В связи с чем, вблизи внутренней поверхности стенки образуется слой газа с температурой, значительно превышающей его температуру в потоке. Вследствие возрастания вязкости и теплопроводности с увеличением температуры на стенке образуется слой газа с высокой вязкостью и теплопроводностью, течение которого затормаживается. Отметим, что формулы зависимости вязкости газа от температуры и конкретные примеры расчётов даны в [79]. В слое заторможенного и находящегося при высокой температуре газа происходит его интенсивное термическое разложение на водород и углерод. Образующийся на внутренних стенках реактора углерод уменьшает эффективность прогрева метана и производительность реактора.

Для эффективного решения проблемы удаления углеродных отложений, необходимо выполнить исследование механизма и причин их образования. С этой целью рассмотрим математические постановки задач динамического и теплового пограничных слоев и выполним исследование их решений. Математическая постановка краевой задачи для динамического пограничного слоя с учётом ряда допущений (допущение одномерного плоского течения) включает уравнение движения (Навье – Стокса), уравнение сплошности и соответствующие краевые условия [22, 53, 66, 105]

$$\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}; \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0; \tag{3.15}$$

$$\upsilon_x\big|_{y=0} = \upsilon_y\big|_{y=0} = 0; \qquad (3.16) \qquad \upsilon_x\big|_{y=\delta(x)} = \upsilon = \text{const}; \qquad (3.17)$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right|_{y=\delta(x)} = 0; \qquad (3.18) \qquad \left.\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0, \qquad (3.19)$$

где ν – кинематическая вязкость среды; υ_x, υ_y – составляющие скорости по координатным осям; x, y – координаты: $\delta(x)$ – толщина динамического пограничного слоя; υ – скорость невозмущенного потока за его пределами; поэтому на границе скорость υ_x достигает значения υ.

Граничное условие (3.19) вводится с целью выполнения уравнения (3.14) на границе $y = 0$ и, по сути, оно является дополнительным граничным условием.

Вследствие нелинейности задачи (3.14) – (3.19), её точное решение не получено. Для упрощения процесса получения решения используем допущение о том, что решение удовлетворяет не уравнениями (3.14), (3.15), а их осредненным аналогам. Используя это допущение, для скорости в динамическом слое получено интегральное уравнение вида [22, 53, 105]

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} (\upsilon_x - \upsilon)\upsilon_x dy = -\nu\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (3.20)$$

Осреднение приводит к уменьшению точности решения уравнений (3.14), (3.15). Однако использование дополнительных граничных условий позволяет получить такое аналитическое решение, которое удовлетворяет уравнениям (3.14), (3.15) с заданной точностью.

В случае переменной по координате y вязкости $\nu(y) = \nu^*(1 - \beta y)$ уравнение (3.14) принимает вид

$$\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu^*(1 - \beta y)\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right], \qquad (3.21)$$

где $\nu(y)$ – переменная по координате y кинематическая вязкость; ν^* – кинематическая вязкость при $y = 0$ $(y < 1)$; β – коэффициент, характеризующий уменьшение скорости по координате y $(\beta < 1)$.

Уравнение (3.21) можно представить в виде

$$\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = -\nu^* \beta \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \nu^* (1 - \beta y) \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}. \qquad (3.22)$$

К граничным условиям (3.16) – (3.19) добавляется дополнительное граничное условие, получаемое из требования выполнения уравнения (3.22) непосредственно на стенке $y = 0$. С учётом условий (3.16) и (3.19) из уравнения (3.22) следует

$$\left. \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \qquad (3.23)$$

Выполнение искомым решением ДГУ (3.23) означает выполнение уравнения (3.22) в точке $y = 0$.

Отметим, что уравнение на границах выполняется при любом методе решения краевой задачи, включая и классические точные аналитические методы. В работах [52, 95] приводятся математические доказательства теорем о том, что выполнение уравнения на границах при большом числе приближений приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, минуя непосредственное интегрирование по пространственной координате, ограничиваясь лишь выполнением его осреднённого аналога.

Интегральное уравнение для υ_x (осреднённый аналог уравнения (3.22)) в данном случае будет

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} \upsilon_x (\upsilon_x - \upsilon)\, dy = -\nu^* \beta \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} dy + \int_0^{\delta(x)} \nu^* (1 - \beta y) \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} dy\ . \qquad (3.24)$$

Обозначим:

$$Q_x = \upsilon_x / \upsilon; \qquad \gamma = \nu^* / \upsilon. \qquad (3.25)$$

С учётом обозначений (12) математическая постановка задачи примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} Q_x (Q_x - 1)\, dy + \gamma \beta \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial Q_x}{\partial y} dy = \gamma \int_0^{\delta(x)} (1 - \beta y) \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} dy\ . \qquad (3.26)$$

$$Q_x(x, 0) = 0; \qquad (3.27) \qquad Q_x(x, \delta) = 1; \qquad (3.28) \qquad \frac{\partial Q_x(x, \delta)}{\partial y} = 0, \qquad (3.29)$$

$$\frac{\partial Q_x(x,0)}{\partial y}=0; \qquad (3.30) \qquad \frac{\partial^2 Q_x(x,0)}{\partial y^2}=0. \qquad (3.31)$$

Примем решение задачи в виде

$$Q_x(x,y)=\sum_{k=1}^{n} a_k(\delta(x))\varphi_k(y), \qquad (3.32)$$

где $a_k(\delta(x))$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y)=y^{2k-1}$ – координатные функции $(k=\overline{1,n})$.

Формула (3.32) удовлетворяет (3.27), (3.31). Неизвестные $a_k(\delta(x))$ находятся из условий (3.28) – (3.30). Подставляя (3.32) в (3.28) – (3.30), для $a_k(\delta(x))$, $(k=1,2,3)$ имеем систему трёх алгебраических уравнений. Ее решение: $a_1=0$; $a_2=5/(2\delta^3)$; $a_3=-3/(2\delta^5)$. Подставляя эти коэффициенты в (3.32), получаем

$$Q_x(x,y)=\frac{\upsilon_x}{\upsilon}=\frac{5}{2}\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^5. \qquad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.26), для $\delta(x)$ находим уравнение

$$\frac{d\delta(x)}{dx}=\gamma\beta. \qquad (3.34)$$

Его решение (при $\delta(0)=0$) будет

$$\delta(x)=\gamma\beta x. \qquad (3.35)$$

Подставив (3.35) в (3.33) для параметров установки пиролиза метана $\gamma=\nu^*/\upsilon=0{,}2\ м$, $\beta=0{,}25\ м^{-1}$ имеем

$$Q_x(x,y)=\frac{\upsilon_x}{\upsilon}=2\cdot10^4\left(\frac{y}{x}\right)^3-4{,}8\cdot10^6\left(\frac{y}{x}\right)^5. \qquad (3.36)$$

Анализ формулы (3.36) показывает, что кривые для зависимостей скорости в точке $y=0$ касательны к оси y (выполнение условия (3.30)). Следовательно, изотахи в точке $y=0$ будут перпендикулярны к продольной оси x при практически нулевой скорости течения (застойный участок) (рис. 3.6).

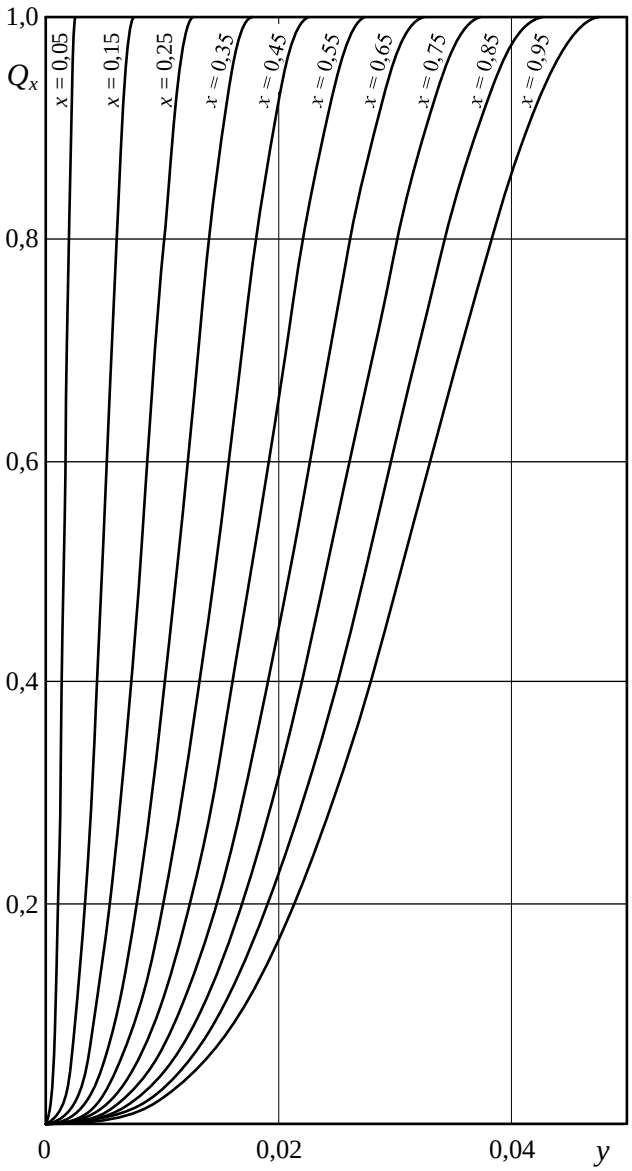


Рис. 3.6. Изменение скорости

Находящийся в застойной зоне метан, имеющий высокую температуру (практически равную температуре стенки реактора), интенсивно пиролизируется с отложением образующегося углерода на стенках.

При этом интенсивность теплообмена на границе стенка – газ, ввиду низкой теплопроводности отложений (пиролизный графит), уменьшается. Уменьшается также диаметр канала, вплоть до его полного перекрытия и прекращения подачи газа, то есть останова процесса пиролиза.

Формула (3.33) будет использована далее при расчётах теплового пограничного слоя. Математическая постановка для него при переменной по координате y температуропроводности $a(y) = a^*(1 - zy)$ имеет вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta(x)} \upsilon_x\left[t(x,y)-t_{\text{ср}}\right]dy = \int_0^{\Delta(x)} \frac{d}{dy}\left[a^*(1-zy)\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}\right]dy. \qquad (3.37)$$

$t(x,0)=t_{\text{ст}}$; (3.38) $t(x,\Delta(x))=t_{\text{ср}}$; (3.39) $\partial t(x,\Delta(x))/\partial y=0$, (3.40)

где $t(x,y)$ – температура газа в тепловом пограничном слое; $t_{\text{ср}}$ – температура невозмущённого потока; $t_{\text{ст}}$ – температура стенки реактора; υ_x – скорость в динамическом пограничном слое; a^* – коэффициент температуропроводности газа при $y=0$ (при $t(x,0)=t_{\text{ст}}$); $\Delta(x)$ – толщина теплового пограничного слоя; z – коэффициент, характеризующий изменение температуропроводности по координате y, $м^{-1}$.

Интегральное уравнение (3.37) является осреднённым аналогом уравнения энергии (движения)

$$\upsilon_x\frac{dt(x,y)}{dx}+\upsilon_x\frac{dt(x,y)}{dy}=\frac{d}{dy}\left[a^*(1-zy)\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}\right]. \qquad (3.41)$$

Для того чтобы уравнение (3.41) выполнялось в граничной точке $y=0$, к основным условиям (3.38) – (3.40) необходимо добавить следующие дополнительные граничные условия

$$\frac{\partial t(x,0)}{\partial y}=0; \qquad (3.42) \qquad \frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2}=0. \qquad (3.43)$$

Для отсчёта температуры от температуры стенки обозначим: $\Theta=(t-t_{\text{ст}})/(t_{\text{ср}}-t_{\text{ст}})$. С учётом принятых обозначений задача (3.37) – (3.40), (3.42), (3.43) будет

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta(x)}\upsilon_x(\Theta(x,y)-1)\,dy=-a^*z\int_0^{\Delta(x)}\frac{\partial\Theta(x,y)}{\partial y}dy+a^*\int_0^{\Delta(x)}(1-zy)\frac{\partial^2\Theta(x,y)}{\partial y^2}\partial y; \qquad (3.44)$$

$\Theta(x,0)=0$; (3.45) $\Theta(x,\Delta(x))=1$; (3.46) $\partial\Theta(x,\Delta(x))/\partial y=0$; (3.47)

$$\frac{\partial\Theta(x,0)}{\partial y}=0; \qquad (3.48) \qquad \frac{\partial^2\Theta(x,0)}{\partial y^2}=0. \qquad (3.49)$$

Примем решение задачи в виде

$$\Theta(x,y)=\sum_{k=1}^{n} b_k(\Delta(x))\varphi_k(y)\ , \tag{3.50}$$

где $b_k(\Delta(x))$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y)=y^{2k-1}$ – координатные функции $(k=\overline{1,n})$.

Формула (3.50) удовлетворяет условиям (3.45), (3.49). Подставляя (3.50) (при $n=3$) в (3.46) – (3.48), для $b_k(\Delta(x))$ $(k=1,2,3)$ имеем систему трёх уравнений. Ее решение: $b_1=0$; $b_2=5/(2\Delta^3)$; $b_3=-3/(2\Delta^5)$. С учётом найденных значений формула (3.50) принимает вид

$$\Theta(x,y)=\frac{5}{2}\left(\frac{y}{\Delta(x)}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\Delta(x)}\right)^5. \tag{3.51}$$

Отметим, что соотношение (3.33) и (3.51) по форме записи идентичны, что объясняется одинаковыми граничными условиями (3.27) – (3.31) и (3.45) – (3.49).

Подставив (3.51) в (3.44), учитывая υ_x из (3.33), находим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta(x)}\upsilon\left(\frac{5}{2}\frac{y^3}{\delta(x)^3}-\frac{3}{2}\frac{y^5}{\delta(x)^5}\right)\left(\frac{5}{2}\frac{y^3}{(\Delta(x))^3}-\frac{3}{2}\frac{y^5}{(\Delta(x))^5}-1\right)dy=\\ =-a^*z+a^*\int_0^{\Delta(x)}(1-zy)\left(15\frac{y}{(\Delta(x))^3}-30\frac{y^3}{(\Delta(x))^5}\right)\partial y.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Отметим, что первое слагаемое правой части уравнения (3.44) равно нулю. В самом деле

$$-a^*z\int_0^{\Delta(x)}\frac{\partial\Theta(x,y)}{\partial y}dy=-a^*z\frac{\partial\Theta}{\partial y}\bigg|_0^{\Delta(x)}=-a^*z\left(\frac{\partial\Theta(x,\Delta(x))}{\partial x}-\frac{\partial\Theta(x;0)}{\partial x}\right)=0. \tag{3.53}$$

Равенство нулю обеспечивается граничными условиями (3.47), (3.48).

Соотношение (3.52) после расчета интегралов приводится к уравнению

$$\frac{5\upsilon}{132}\frac{d}{dx}\left(\frac{(\Delta(x))^6}{(\delta(x))^5}\right)-\frac{165\upsilon}{1848}\frac{d}{dx}\left(\frac{(\Delta(x))^4}{(\delta(x))^3}\right)+a^*z=0. \tag{3.54}$$

Приняв $\Delta(x)=\delta(x)$, формула (3.54) будет

$$\frac{95}{1848}\upsilon\frac{d(\Delta(x))}{dx}+a^*z=0. \tag{3.55}$$

Интегрируя (3.55) (при начальном условии $\Delta(x)|_{x=0} = 0$), получаем

$$\Delta(x) = \frac{95}{1848}\frac{a^* z}{\upsilon}x \ . \qquad (3.56)$$

Формулы (3.51), (3.56) являются решением задачи (3.44) – (3.49) в третьем приближении. Результаты расчётов по формуле (3.51) при $z = 0{,}9$; $a = 10^{-4}\ м^2/с$; $\upsilon = 0{,}1\ м/с$ даны на рис. 3.7. Их анализ позволяет заключить, что кривые температуры, в точке $y = 0$ касательны к оси y (выполнение условия (3.48)). Следовательно, изотермы практически перпендикулярны продольной оси x при температуре, практически равной температуре стенки реактора. Вследствие высокой температуры газа, в этой области происходит интенсивное отложение углерода, подтверждаемое результатами многочисленных экспериментов, выполненных в молодежной лаборатории «Нефтегазовые технологии получения водорода и графит» Самарского государственного технического университета.

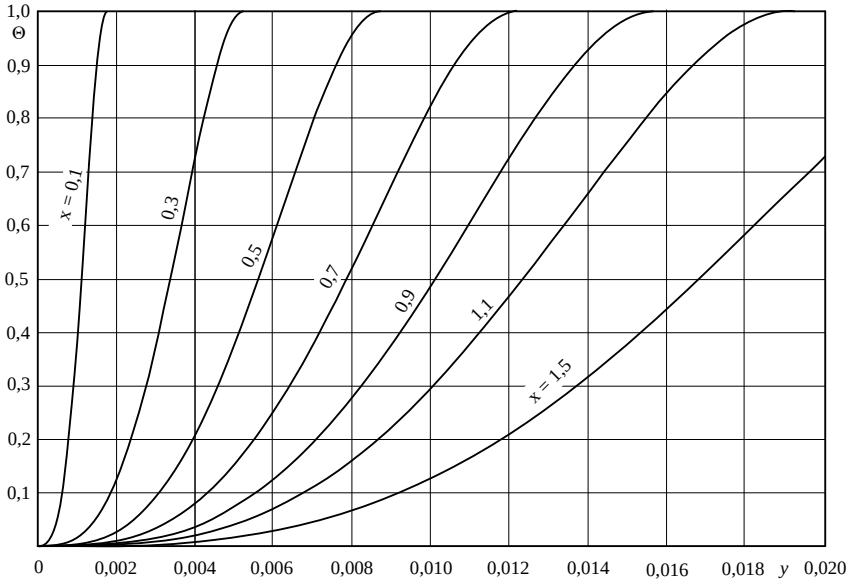


Рис. 3.7. Изменение температуры в тепловом пограничном слое в различных сечениях продольной координаты x

Выводы

1. Получена математическая модель динамического пограничного слоя с учетом переменности вязкости по его толщине. Анализ аналитического решения

позволил заключить, что вследствие возрастания вязкости газа вблизи стенки образуются застойные зоны.

2. Получена математическая модель теплового пограничного слоя с учетом переменности температуропроводности по его толщине. Анализ ее аналитического решения показал, что изотермы на некотором начальном отрезке координаты y практически перпендикулярны продольной оси x.

3. Ввиду затормаживания газа в высокотемпературной пристеночной области и, вследствие этого, перпендикулярности изотах и изотерм к продольной оси x, на стенке образуются застойные области, в которых происходит интенсивное образование пиролизного углерода. Часть его отлагается на стенках, а другая часть уносится потоком движущегося газа. Анализ углерода, отложившегося на стенках реактора, показывает, что непосредственно на стенке он имеет более жёсткую структуру, а на некотором удалении от неё – переходит в более рыхлое состояние. Такая структура периферийного углерода, непосредственно соприкасающегося с движущимся метаном, создаёт условия для ещё бóльшего тормозящего эффекта на границе между слоем отложений и газом, способствуя, тем самым, ещё более интенсивному росту отложений.

3.3. Расчет калориферов глубокого охлаждения газов, уходящих из печи реактора пиролиза метана

Выполнен расчет площади поверхности пластинчатого калорифера реактора пиролиза метана с целью охлаждения выходящих из газовой печи дымовых газов до температуры точки росы содержащихся в них водяных паров. При этом были заданы: температура охлаждающей воды на входе и выходе калорифера; температура дымовых газов на выходе из печи (входе в калорифер) и выходе из калорифера; расход газа; скорость воды в трубках калорифера; живое сечение калорифера для прохода газа; живое сечение трубок калорифера для прохода воды. В результате экспериментальных исследований показано, что при сжигании в печи метана в результате глубокого охлаждения уходящих газов возможно получение чистой дистиллированной воды.

При пиролизе метана (термическое разложение на водород и углерод без доступа кислорода) его необходимо нагревать до температуры $700-1000\,°C$. В конструкции печи, в которой нагревается реактор с пиролизуемым метаном, в качестве топлива применяется другой метан, используемый для сжигания в печи (рис. 3.1, 3.8).

Установка пиролиза метана включает: 1 – реактор, пиролиза метана; 2 – газовая печь, предназначенная для нагрева реактора путем факельного сжигания другого метана, являющегося топливом для печи; 3 – тепловая изоляция; 4 – выхлопные трубы; 5 – горелки для сжигания метана; 6 – краны; 7 – ёмкости для метана; 8 – трубка подачи метана в реактор пиролиза; 9 – трубка отбора метано – водородной смеси; 10 – калорифер, в котором для охлаждения выходящих из печи газов используется водопроводная вода 11; 12 – трубка слива дистиллированной воды, получаемой в результате глубокого охлаждения уходящих газов.

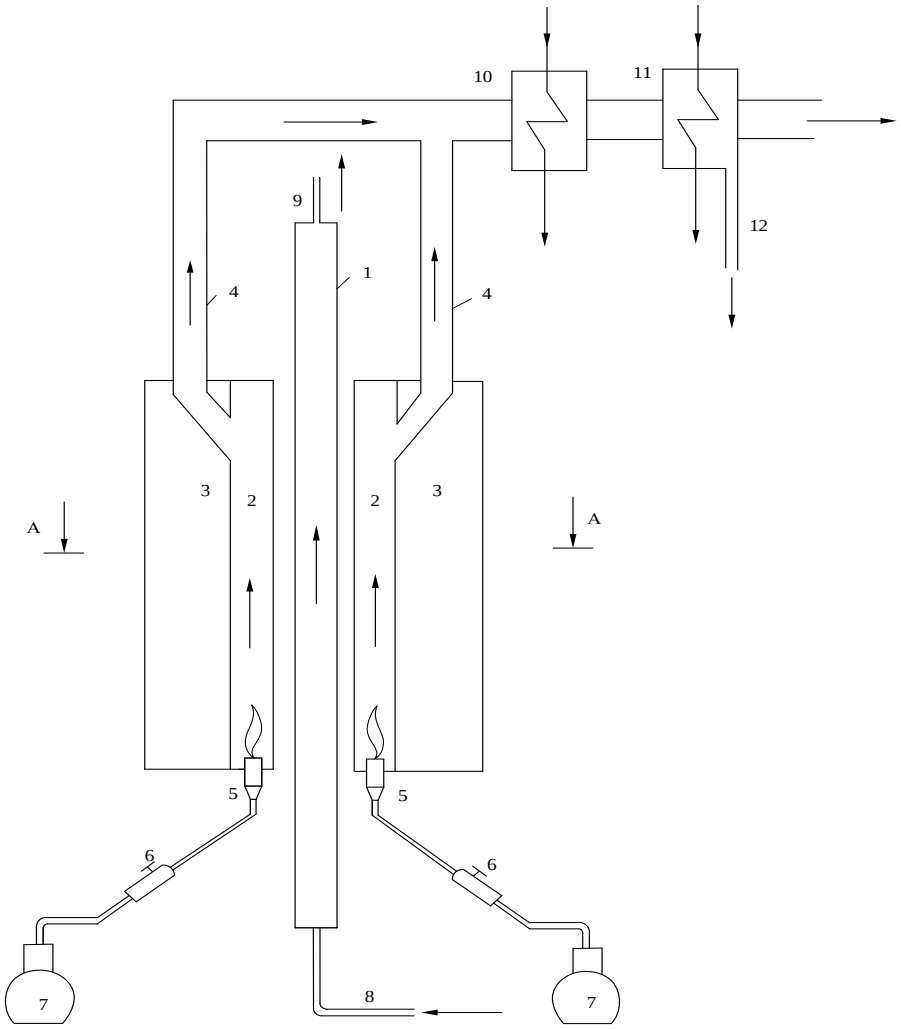


Рис. 3.8. Схема установки пиролиза метана

Установка предназначена для получения водорода путём термического разложения углеводородных соединений, например метана. Основным элементом является реактор пиролиза, изготовленный из высоколегированной нержавеющей, стали. Внутри реактора метан подвергается воздействию высокой температуры (700 °C при использовании катализатора, 1000 °C – без использования катализатора), в результате чего происходит его разложение на газообразный водород и твёрдый углерод (сажу). Реактор оснащён впускной трубкой для подачи исходного газа и выпускной трубкой для отбора полученного водорода.

Реактор расположен внутри вертикальной цилиндрической газовой печи, также изготовленной из нержавеющей, стали. Между реактором и внутренней стенкой печи имеется зазор в 10 мм, который обеспечивает эффективный обогрев реакционной зоны. Нагрев осуществляется за счёт сжигания части полученного

водорода. В нижней части печи установлены две горелки: растопочная горелка, используемая на начальном этапе запуска системы, и основная горелка, предназначенная для поддержания рабочей температуры в процессе функционирования установки. Основная горелка подключена к выпускной трубке для отбора водорода через отводную трубку.

Теплоизоляция печи выполнена из кремнезёмной ваты толщиной 170 мм, что способствует снижению теплопотерь и повышению общей энергоэффективности. Диаметр печи с учётом теплоизоляции составляет 500 мм. Площадь поверхности теплоизоляции — 1,3 м², площадь стен топки — 0,567 м², её объём — 0,006 м³. Площадь сечения реактора — 0,0019 м².

Для поддержания необходимого давления в системе на трубке отвода водорода установлен компрессор. Он обеспечивает стабильное давление, необходимое для работы горелки, сжигающей часть полученного водорода.

Устройство работает следующим образом. В начальный момент времени для разогрева реактора до рабочей температуры используется запальная горелка, работающая на водороде, поступающем из внешней ёмкости для хранения. После достижения температуры 700 °C через впускную трубку начинается подача углеводородного газа (например, метана). Под воздействием высокой температуры происходит его каталитический пиролиз с образованием водорода и твёрдого углерода. Часть полученной метановодородной смеси направляется в основную горелку, обеспечивая автономное теплоснабжение реактора. После выхода системы на рабочий режим растопочная горелка отключается.

Особенностью конструкции является использование части полученного водорода для поддержания процесса его собственного производства. Это позволяет отказаться от использования внешних источников энергии и свести к минимуму выбросы оксидов углерода в атмосферу. Кроме того, отсутствует система разделения газовых потоков, что упрощает конструкцию и снижает себестоимость установки.

По предварительным расчётам, для поддержания стационарного режима пиролиза требуется 25–30 % от общего объёма производимого водорода. На

производство одного кубометра водорода затрачивается около 1,9 кВт·ч тепловой энергии. Удельная теплота сгорания водорода составляет 3,0 кВт·ч/м³, следовательно, для поддержания процесса необходимо направлять в горелку около 63 % от общего объёма производимого водорода. Таким образом, для получения 1 м³ водорода требуется примерно 1,59 м³ метана, без потребления электроэнергии и практически без вредных выбросов.

Экспериментальный образец установки был изготовлен и испытан в Самарском государственном техническом университете (см. рис. 3.1). Результаты показали, что время выхода на рабочий режим составляет 7–10 минут. В ходе испытаний в качестве топлива для растопочной горелки использовался водород, а в качестве сырья — метан. Установка показала высокую экологичность и энергоэффективность, что делает её перспективной для применения в экологически чистых технологиях получения водородного топлива.

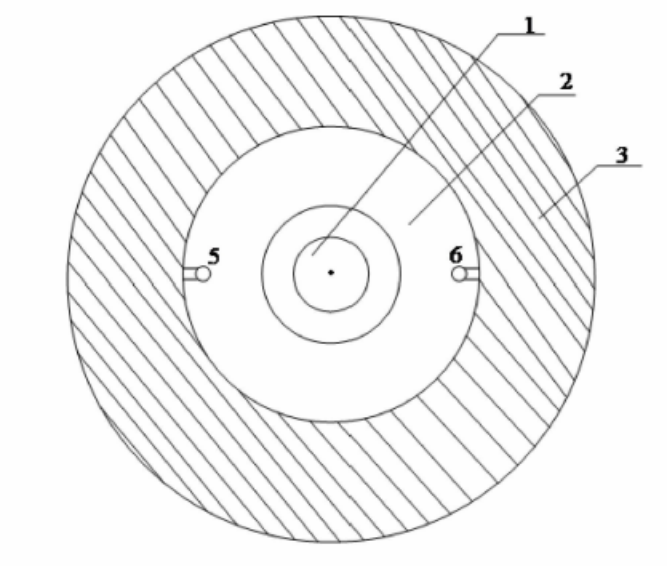


Рис. 3.9. Схема устройства для получения водорода в разрезе

На рис. 3.9 представлена схема устройства для получения водорода в разрезе, вид сверху (сечение А – А, см. рис.3.7). На схеме обозначены следующие элементы:

1 — реактор пиролиза углеводородов;

2 — газовая печь;

3 — теплоизоляция;

5 — запальная горелка для сжигания водорода;

6 — горелка для сжигания части полученного в реакторе водорода.

Установка пиролиза метана изготовлена в Самарском государственном техническом университете сотрудниками молодежной опытно – промышленной лаборатории «Нефтегазовые технологии производства водорода и графита».

Температура газов на выходе из печи составляет $700\,°C$. Их охлаждение в калорифере до температуры конденсации содержащихся в них водяных паров (до температуры точки росы) позволяет получить $0{,}55\,кг$ чистой дистиллированной воды на $1\,м^3$ сжигаемого в печи метана. Вода, предназначенная для охлаждения дымовых газов в калорифере, нагревается до температуры $90\,°C$ и может быть использована для отопления помещений.

Площадь поверхности нагрева пластин калорифера находится по формуле [41]

$$F = \frac{Q}{K(t_{\text{ср.г}} - t_{\text{ср.в}})},\ м^2, \tag{3.57}$$

где K – коэффициент теплопередачи калорифера, $Вт/(м^2 \cdot °C)$; Q – количество теплоты, отбираемой от газов охлаждающей водой, $Вт$; $t_{\text{ср.г}}$ – средняя температура газов (CO_2), °С; $t_{\text{ср.в}}$ – средняя температура воды, °С.

Формула для расчета количества теплоты, отбираемой от газа охлаждающей водой имеет вид

$$Q = Gc(t_{\text{нач.г}} - t_{\text{кон.г}}),\ Вт, \tag{3.58}$$

где G – количество охлаждаемого газа, $кг/с$; c – теплоемкость газа, $кДж/(кг \cdot °С)$; $t_{\text{нач.г}}$ – температура газа на входе в калорифер, °С; $t_{\text{кон.г}}$ – температура газа на выходе из калорифера, $°C$.

Средние температуры газа и воды находятся по соотношениям

$$t_{\text{ср.г}} = \frac{t_{\text{нач.г}} + t_{\text{кон.г}}}{2},\ °С; \tag{3.59}$$

$$t_{\text{ср.в}} = \frac{t_{\text{нач.в}} + t_{\text{кон.в}}}{2},\ °С, \tag{3.60}$$

где $t_{\text{нач.в}}$ – температура воды на входе в калорифер, °С; $t_{\text{кон.в}}$ – температура воды на выходе из калорифера, °С.

Для определения массовой скорости газа используется формула

$$\nu_{\text{г}}\rho = G / f, кг/(м^2 \cdot °\text{C}), \quad (3.61)$$

где $\nu_{\text{г}}$ – скорость газа в калорифере, $м/с$; ρ – плотность газа, $кг/м^3$; f – живое сечение калорифера для прохода газа, $м^2$.

Скорость воды в трубках калорифера определялась по формуле [41]

$$\nu_{\text{в}} = \frac{Q}{1000 c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} f_{\text{в}} (t_{\text{кон.в}} - t_{\text{нач.в}})}, м/с, \quad (3.62)$$

где $c_{\text{в}}$ – удельная теплоемкость воды, $кДж/(кг \cdot °\text{C})$; $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды, $кг/м^3$; $f_{\text{в}}$ – живое сечение трубок для прохода воды, $м^2$.

Задача решалась при следующих исходных данных: $t_{\text{нач.в}} = 20\,°\text{C}$; $t_{\text{кон.в}} = 90\,°\text{C}$; $t_{\text{нач.г}} = 700\,°\text{C}$; $t_{\text{кон.г}} = 50\,°\text{C}$; $f = 0{,}25$; $f_{\text{в}} = 0{,}0005$; $K = 3{,}0379\ Вт/(м^2 \cdot °\text{C})$; $\rho = 1{,}977\ кг/м^3$; $\rho_{\text{в}} = 1000\ кг/м^3$; $G = 0{,}01\ кг/с$; $c_{\text{в}} = 4200\ кДж/(кг \cdot °\text{C})$; $c = 850\ кДж/(кг \cdot °\text{C})$.

Результаты расчетов $Q = 5525\ Вт$; $t_{\text{ср.в}} = 55\,°\text{C}$; $t_{\text{ср.г}} = 375\,°\text{C}$; $\nu_{\text{г}} = 0{,}25\ м/с$; $\nu_{\text{в}} = 0{,}038\ м/с$; $F = 5{,}6833\ \text{м}^2$. После определения площади пластин подбираются соответствующие калориферы. В п. п. 4.5 рассмотрено подробное описание программного комплекса для расчета площади поверхности пластин калорифера реактора пиролиза метана.

Выводы

1. В ходе исследования разработана и проанализирована математическая модель формирования динамического пограничного слоя при пиролизе метана в реакторе с учётом зависимости вязкости газа от температуры. Получено аналитическое решение, позволившее установить, что при нагревании метана до температуры порядка 1000 °С его вязкость значительно возрастает, что приводит к образованию неподвижного слоя газа у внутренней поверхности стенки

реактора. В этом слое происходит интенсивный пиролиз метана с образованием водорода и твёрдого углерода, который отлагается на стенках реактора. Формирование динамического пограничного слоя происходит на некотором расстоянии от стенки, где скорость газа практически равна нулю. Образующиеся отложения углерода уменьшают проходное сечение реактора, ухудшают теплообмен и циркуляцию газа, что снижает эффективность процесса пиролиза. Было установлено, что при линейной зависимости вязкости от поперечной координаты пограничного слоя изотахи (линии одинаковой скорости) перпендикулярны продольной оси потока, что подтверждает наличие застойной зоны вблизи стенки. Такие условия способствуют интенсивному образованию отложений, что в дальнейшем может привести к полному перекрытию канала и остановке процесса пиролиза. Таким образом, результаты моделирования позволили выявить основные закономерности формирования пограничного слоя и предпосылки к образованию углеродных отложений, а также обосновать необходимость разработки методов предотвращения или минимизации образования этих отложений без остановки работы реактора.

2. Исследование также включало анализ теплового и динамического пограничных слоёв при переменных значениях вязкости и температуропроводности газа в условиях высоких температур. С помощью интегрального метода теплового баланса были получены аналитические решения, описывающие формирование теплового пограничного слоя при переменной температуропроводности. Установлено, что вблизи стенки реактора, образуется слой газа с высокой температурой и вязкостью, в котором скорость газа практически равна нулю. Изотермы и изотахи в этом слое перпендикулярны продольной оси потока, что указывает на наличие застойной области. В этой зоне происходит интенсивное разложение метана с образованием водорода и твёрдого углерода, который отлагается на стенках реактора. Анализ структуры отложений показал, что углерод, образующийся непосредственно у стенки, имеет плотную, жёсткую структуру, тогда как на удалении от стенки он становится более рыхлым. Такая структура усиливает торможение потока и способствует ещё более

активному нарастанию отложений. Кроме того, низкая теплопроводность пиролизного графита ухудшает теплообмен между стенкой и основным потоком газа. Полученные результаты позволили установить взаимосвязь между гидродинамическими и тепловыми характеристиками пограничного слоя и процессом образования углеродных отложений, что имеет важное значение для оптимизации конструкции реактора и повышения его надёжности и эффективности при длительной эксплуатации.

3. Выполнен расчёт площади поверхности нагрева пластинчатого калорифера – 10, предназначенного для охлаждения дымовых газов, выходящих из газовой печи, до температуры точки росы содержащихся в них водяных паров. Целью расчёта было определение геометрических параметров теплообменной поверхности калорифера, необходимой для эффективной утилизации тепла и получения дистиллированной воды в качестве побочного продукта. В результате расчётов были определены: количество теплоты, отбираемой от газа охлаждающей водой (Q = 5525 Вт), средние температуры газа и воды (375 °C и средняя температура 35 °C соответственно), массовая скорость газа и воды, а также площадь теплообменной поверхности калорифера, которая составила F = 5,68 м². При сжигании 1 м³ метана в печи удалось получить до 0,55 кг чистой дистиллированной воды, что подтверждает возможность эффективного использования тепла уходящих газов не только для нагрева воды, но и для получения ценного побочного продукта. Нагретая в калорифере вода может использоваться в системах отопления или в других технологических процессах, что повышает общую энергоэффективность установки. Таким образом, расчёт показал, что использование калорифера в составе установки пиролиза метана позволяет эффективно утилизировать теплоту дымовых газов, повысить экономичность и экологичность процесса, а также расширить функциональные возможности установки за счёт получения дополнительных полезных продуктов.

Глава 4. Разработка программных средств для численно – аналитического исследования теплообмена в реакторах пиролиза метана

4.1. Описание программных средств, реализующих численно – аналитические методы расчёта тепловых процессов в реакторах пиролиза метана

В четвёртой главе представлены результаты разработки программных средств для вычислительных систем, предназначенных для реализации предложенных в работе численно – аналитических методов расчёта тепловых процессов в реакторах пиролиза метана.

В п. 4.2 – 4.5 описаны алгоритмы следующих задач:

1) нестационарного теплообмена в реакторах в условиях третьей краевой задачи;

2) нелинейной задачи теплопроводности с использованием дополнительной искомой функции и интеграла теплового баланса;

3) определение мощности внутреннего источника тепла по температурному отклику;

4) расчёт теплообменной поверхности калорифера реактора пиролиза метана с целью охлаждения дымовых газов.

При решении этих задач использовались подходы: метод введения дополнительной искомой функции и метод коллокации. Все алгоритмы реализованы с использованием инженерного математического пакета Mathcad и языка программирования Python.

С использованием возможностей автоматизированного моделирования в Mathcad были разработаны эффективные вычислительные процедуры, позволяющие ускорить процесс получения результатов и обеспечить их практическую применимость в инженерной практике. Это особенно актуально при проектировании теплонапряжённых элементов оборудования, например калориферов для глубокого охлаждения газов с целью получения вторичных продуктов.

На рисунке 4.1 дана схема решения задач теплопроводности с использованием программных средств Mathcad, на рисунке 4.2 – Python.

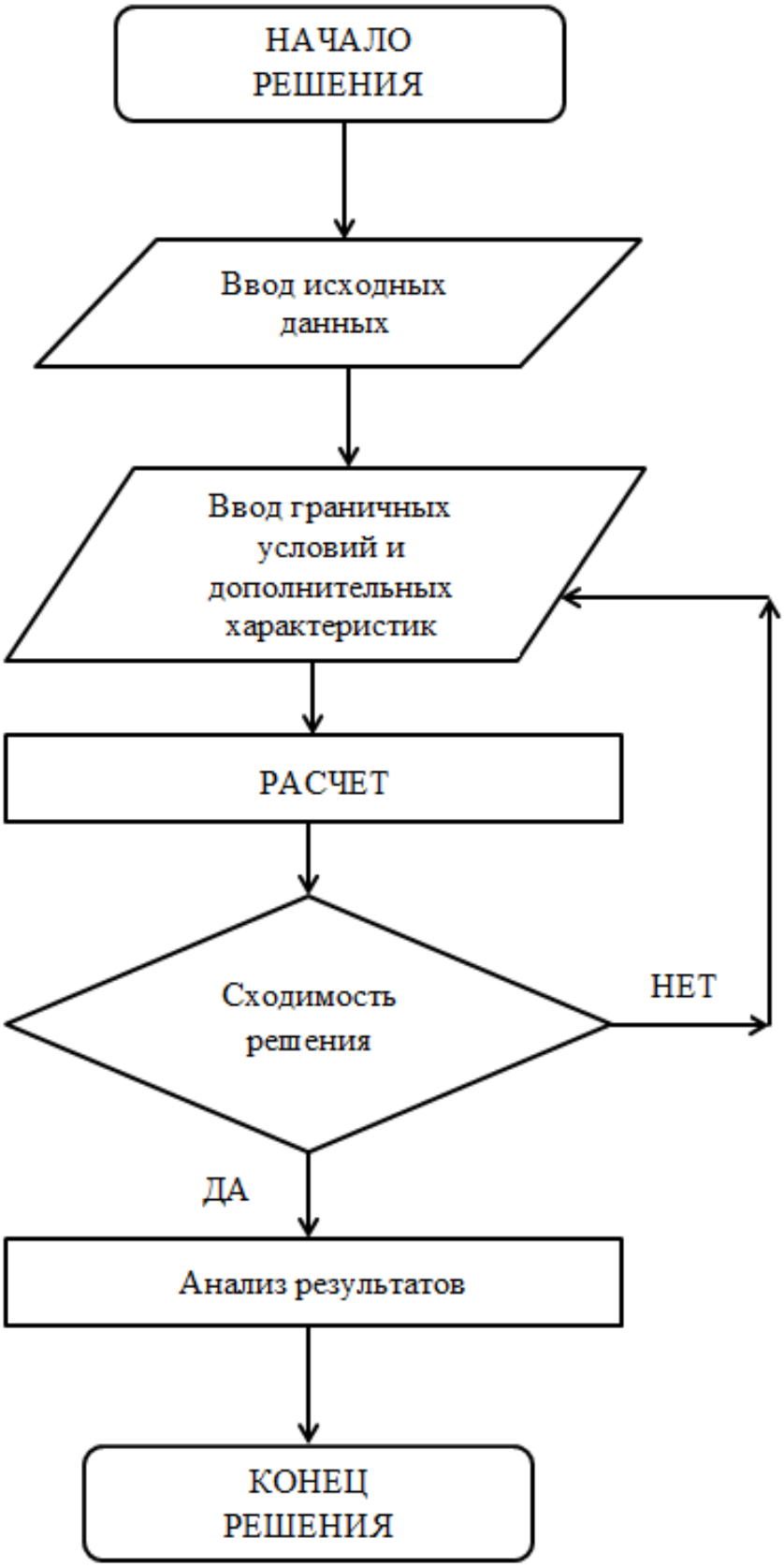


Рис. 4.1. Алгоритм решения задач теплопроводности в Mathcad

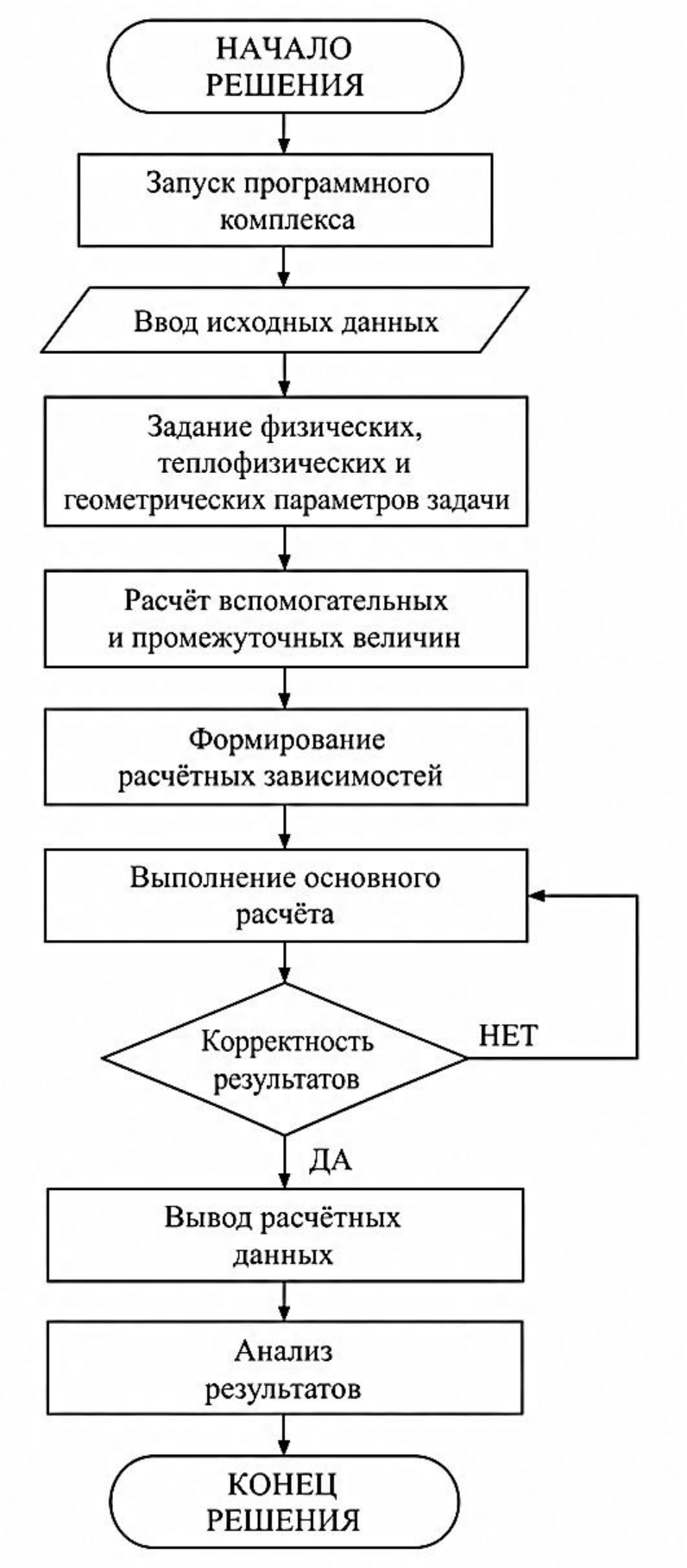


Рис. 4.2. Обобщённый алгоритм работы программных комплексов для расчёта тепловых процессов, реализованных на языке Python

4.2. Программный комплекс для моделирования нестационарного теплообмена в реакторах с граничными условиями третьего рода

Программа «Расчёт теплообмена в стенках реакторов при несимметричных условиях третьего рода» предназначена для численного моделирования процесса теплопроводности в стенке реактора при несимметричных граничных условиях третьего рода.

Задачи решаются при следующих условиях:

1) задана температура стенки в начальный момент времени;
2) на границах стенки заданы коэффициенты теплоотдачи и температуры окружающих сред.

Цель программного комплекса: определить изменение температуры внутри стенки во времени и пространстве.

1. Записывается математическая постановка задачи п. 2.1, описываемая формулами (2.6 – 2.9):

$$\frac{d}{dFo}\Theta(\xi,Fo) = \frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\,, \tag{4.1}$$

Начальное условие: $\Theta(\xi,0) = 0$, (4.2)

Граничные условия:

$$\frac{d}{d\xi}\Theta(0,Fo) - Bi1\cdot(\Theta(0,Fo) + D) = 0\,, \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{d\xi}\Theta(1,Fo) + Bi2\cdot(\Theta(1,Fo) - 1) = 0\,, \tag{4.4}$$

2. Решение ищется в виде суммы стационарной и нестационарной задач:

$$\Theta(\xi,Fo) := (\Theta s(\xi) + \Theta n(\xi,Fo)) \tag{4.5}$$

Стационарное распределение температуры описывается линейной функцией:

$$\Theta s(\xi) := F1 + F2\cdot\xi\,, \tag{4.6}$$

где F_1 и F_2 – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (4.3), (4.4). Подставим (4.6) в (4.3), (4.4).

$$\frac{d}{d\xi}\Theta s(\xi) - Bi1\cdot(\Theta s(\xi) + D) = 0 \left|\begin{array}{l}\text{substitute},\xi = 0\\ \text{substitute},D = D\end{array}\right.\rightarrow F2 - Bi1\cdot D - Bi1\cdot F1 = 0 \ ,$$

$$\frac{d}{d\xi}\Theta s(\xi) + Bi2\cdot(\Theta s(\xi) - 1) = 0 \ \text{substitute},\xi = 1 \ \rightarrow F2 - Bi2 + Bi2\cdot F1 + Bi2\cdot F2 = 0 \ ,$$

Given

$$F2 - Bi1\cdot(F1 + D) = 0 \ ,$$
$$F2 + Bi2\cdot(F1 + F2 - 1) = 0 \ . \qquad (4.7)$$

Из решения системы двух алгебраических уравнений находим F_1 и F_2:

$$\text{Find}(F1,F2)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix}\dfrac{Bi2 + Bi2\cdot D}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2} - D\\ \dfrac{Bi1\cdot Bi2\cdot(D + 1)}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2}\end{bmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix}F1\\ F2\end{pmatrix} := \begin{bmatrix}\dfrac{Bi2 + Bi2\cdot D}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2} - D\\ \dfrac{Bi1\cdot Bi2\cdot(D + 1)}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2}\end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

После определения F_1 и F_2 в виде (4.8) решение стационарной задачи принимает вид:

$$\Theta s(\xi) := \frac{Bi2 + Bi2\cdot D}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2} - D + \frac{Bi1\cdot Bi2\cdot\xi\cdot(D + 1)}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2} \left|\begin{array}{l}\text{substitute},Bi2 = 2\\ \text{substitute},Bi1 = 3\\ \text{float},4\end{array}\right.\rightarrow \begin{array}{l}F1 \equiv \dfrac{2}{11}\\ F2 \equiv \dfrac{6}{11}\end{array} \qquad (4.9)$$

3. Математическая постановка нестационарной задачи имеет вид:

$$\frac{d}{dFo}\Theta n(\xi,Fo) = \frac{d^2}{dx^2}\Theta n(\xi,Fo) \ , \qquad (4.10)$$

$$\Theta n(\xi,0) = -\Theta c(\xi) \ , \qquad (4.11)$$

$$\frac{d}{d\xi}\Theta n(0,Fo) - Bi1\Theta n(0,Fo) = 0 \ , \qquad (4.12)$$

$$\frac{d}{d\xi}\Theta n(1,Fo) + Bi2\Theta n(1,Fo) = 0 \ . \qquad (4.13)$$

Примем решение задачи (4.10) – (4.13) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит лишь от времени, а вторая – лишь от пространственной переменной:

$$\Theta n(\xi,Fo) := \phi(Fo)\cdot\psi(\xi) \ . \qquad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в (4.10), находим

$$\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \mu\,\phi(Fo) = 0\ , \tag{4.15}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \mu\cdot\psi(\xi) = 0\ , \tag{4.16}$$

где μ - постоянная.

Решение уравнения (4.15) известно и имеет вид

$$\phi(\xi) := A\cdot\exp(-\mu\cdot Fo)\ , \tag{4.17}$$

где A – постоянная.

Подставляя (4.14) в (4.12), (4.13), находим граничные условия для функции:

$$\frac{d}{dx}\psi(0) - Bi1\cdot\psi(0) = 0\ , \tag{4.18}$$

$$\frac{d}{dx}\psi(1) + Bi2\cdot\psi(1) = 0\ . \tag{4.19}$$

Решение задачи (4.16), (4.18), (4.19) принимаем в виде

$$\psi(\xi) := 1 + b1\cdot\xi^1 + b2\cdot\xi^2 + b3\cdot\xi^3 + b4\cdot\xi^4 + b5\cdot\xi^5 + b6\cdot\xi^6\ , \tag{4.20}$$

где b_k $(k = \overline{1,6})$ – неизвестные коэффициенты.

4. Выполняя уравнение (4.16) в четырех точках коллокаций ($\xi = 0$; 0,2; 0,8; 1,0) и удовлетворяя граничные условия (4.18), (4.19), относительно b_k имеем систему шести алгебраических уравнений (при $\mathrm{Bi}_1 = 3;\ \mathrm{Bi}_2 = 2$):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\xi}\psi(0) - Bi1\cdot\psi(0) = 0\ ,\\
&\frac{d}{d\xi}\psi(1) + Bi2\cdot\psi(1) = 0\ ,\\
&\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(0) + \mu\cdot\psi(0) = 0\ ,\\
&\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(0.2) + \mu\cdot\psi(0.2) = 0\ ,\\
&\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(0.8) + \mu\cdot\psi(0.8) = 0\ ,\\
&\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(1) + \mu\cdot\psi(1) = 0\ .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Подставляя (4.20) в (4.21), имеем:

$$
\begin{aligned}
&\text{Given}\\
&b1 - Bi1 = 0 \quad ,\\
&Bi2 + b1 + 2\cdot b2 + 3\cdot b3 + 4\cdot b4 + 5\cdot b5 + 6\cdot b6 + Bi2\cdot b1 + Bi2\cdot b2 + Bi2\cdot b3 + Bi2\cdot b4 + Bi2\cdot b5 + Bi2\cdot b6 = 0 \quad ,\\
&\mu + 2\cdot b2 = 0\,,\\
&\mu + 2.0\cdot b2 + 1.2\cdot b3 + 0.48\cdot b4 + 0.16\cdot b5 + 0.048\cdot b6 + 0.2\cdot\mu\cdot b1 + 0.04\cdot\mu\cdot b2 + 0.008\cdot\mu\cdot b3 + 0.0016\cdot\mu\cdot b4 + 0.00032\cdot\mu\cdot b5 + 0.000064\cdot\mu\cdot b6 = 0,\\
&\mu + 2.0\cdot b2 + 4.8\cdot b3 + 7.68\cdot b4 + 10.24\cdot b5 + 12.288\cdot b6 + 0.8\cdot\mu\cdot b1 + 0.64\cdot\mu\cdot b2 + 0.512\cdot\mu\cdot b3 + 0.4096\cdot\mu\cdot b4 + 0.32768\cdot\mu\cdot b5 + 0.262144\cdot\mu\cdot b6 = 0,\\
&\mu + 2\cdot b2 + 6\cdot b3 + 12\cdot b4 + 20\cdot b5 + 30\cdot b6 + \mu\cdot b1 + \mu\cdot b2 + \mu\cdot b3 + \mu\cdot b4 + \mu\cdot b5 + \mu\cdot b6 = 0\,.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Решение системы уравнений (4.22) имеет вид

$$
\text{Find}(b1, b2, b3, b4, b5, b6) \rightarrow \begin{bmatrix}
3.0\\
-0.5\cdot\mu\\
-\dfrac{1.0\cdot\left(66.0\cdot\mu^4 - 18421.0\cdot\mu^3 + 1.261237e6\cdot\mu^2 - 1.956e7\cdot\mu + 4.95e7\right)}{2434.0\cdot\mu^2 - 16.0\cdot\mu^3 + 101250.0\cdot\mu - 2.25e6}\\
\dfrac{316.0\cdot\mu^4 - 98012.0\cdot\mu^3 + 7.989237e6\cdot\mu^2 - 1.3200375e8\cdot\mu + 3.58875e8}{4868.0\cdot\mu^2 - 32.0\cdot\mu^3 + 202500.0\cdot\mu - 4.5e6}\\
-\dfrac{1.0\cdot\left(150.0\cdot\mu^4 - 47825.0\cdot\mu^3 + 4.0323e6\cdot\mu^2 - 6.75225e7\cdot\mu + 1.85625e8\right)}{2434.0\cdot\mu^2 - 16.0\cdot\mu^3 + 101250.0\cdot\mu - 2.25e6}\\
\dfrac{100.0\cdot\mu^4 - 31950.0\cdot\mu^3 + 2.685075e6\cdot\mu^2 - 4.5015e7\cdot\mu + 1.2375e8}{4868.0\cdot\mu^2 - 32.0\cdot\mu^3 + 202500.0\cdot\mu - 4.5e6}
\end{bmatrix} .
$$

5. Подставляя b_k в (4.20), находим:

$$
\begin{aligned}
\psi(x) := {} & 3.0\cdot\xi - 0.5\cdot\xi^2\cdot\mu + \frac{\xi^4\cdot\left(-1.3200375e8\cdot\mu + 7.989237e6\cdot\mu^2 + -98012.0\cdot\mu^3 + 316.0\cdot\mu^4 + 3.58875e8\right)}{202500.0\cdot\mu + 4868.0\cdot\mu^2 + -32.0\cdot\mu^3 - 4.5e6} + \left|\frac{\xi^6\cdot\left(-4.5015e7\cdot\mu + 2.685075e6\cdot\mu^2 + -31950.0\cdot\mu^3 + 100.0\cdot\mu^4 + 1.2375e8\right)}{202500.0\cdot\mu + 4868.0\cdot\mu^2 + -32.0\cdot\mu^3 - 4.5e6}\right| -\\
& - \frac{\xi^3\cdot\left(-1.956e7\cdot\mu + 1.261237e6\cdot\mu^2 + -18421.0\cdot\mu^3 + 66.0\cdot\mu^4 + 4.95e7\right)}{101250.0\cdot\mu + 2434.0\cdot\mu^2 + -16.0\cdot\mu^3 - 2.25e6} - \left|\frac{\xi^5\cdot\left(-6.75225e7\cdot\mu + 4.0323e6\cdot\mu^2 + -47825.0\cdot\mu^3 + 150.0\cdot\mu^4 + 1.85625e8\right)}{101250.0\cdot\mu + 2434.0\cdot\mu^2 + -16.0\cdot\mu^3 - 2.25e6}\right| + 1 \quad .
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

6. Применяется полученное соотношение для точки $\xi = 0{,}5$, относительно пяти собственных чисел μ_k получаем полином пятой степени. Его решение:

$$
\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \mu\cdot\psi(\xi) = 0 \quad \left|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{solve},\mu\end{matrix}\right. \rightarrow \begin{pmatrix}
46.478282143828456165\\
3.4043060669173815162\\
189.79790106926105189\\
280.16990974074603794\\
17.649600979247072487
\end{pmatrix} \quad , \quad \mu(\xi) = \begin{pmatrix}
46.478282143828456165\\
3.4043060669173815162\\
189.79790106926105189\\
280.16990974074603794\\
17.649600979247072487
\end{pmatrix} \quad .
$$

Анализ невязки уравнения (4.17) показывает, что для Fo = 0,02 она равна нулю во всем диапазоне переменной ξ:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \mu\cdot\psi(x) = \varepsilon(\xi, Fo),$$

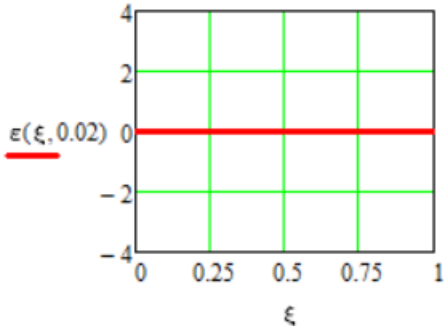


Рис. 4.3. Невязка уравнения Штурма-Лиувилля (4.16)

7. Для определения постоянных A_i $(i = \overline{1,5})$ составляется невязка условия (4.2) (путем подстановки в него соотношения (4.5)) и требуется выполнение ее ортогональности к собственным функциям $\psi_j(\xi)$ $(j = i = \overline{1,5})$. Отсюда получается система из пяти алгебраических уравнений с пятью неизвестными:

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{5} A_n \cdot \left[1 + \sum_{i=0}^{6} \left(bi\cdot\xi^i\right)\right]\cdot\exp\left(-\mu(Fo)_n\right) + F1 + F2\xi\right]\cdot\psi_j(\xi)\,d\xi = 0, \quad j = n = \overline{1,5} \tag{4.24}$$

Given

$2.7546332598977710387\cdot A1 + 0.000601406907675224366658\cdot A2 + -0.013148562621960264359\cdot A3 + -0.012942643521125237828\cdot A4 + 0.057160616778821060009\cdot A5 + 0.760415439423231200086 = 0$

$0.000601406907675224366658\cdot A1 + 0.901652877140502228876\cdot A2 + 0.000964480067979640969927\cdot A3 + 0.038210819485896060369\cdot A4 + -0.003050870449409109874 2\cdot A5 - 0.12491123676203108175 = 0$

$-0.013148562621960264359\cdot A1 + 0.000964480067979640969927\cdot A2 + 0.626883668073164162 76\cdot A3 + -0.021998692815823875775\cdot A4 + 0.161642210357813410 15\cdot A5 + 0.038646111781569380934 = 0$

$-0.012942643521125237828\cdot A1 + 0.038210819485896060369\cdot A2 + -0.021998692815823875775\cdot A3 + 0.403256305901248236 15\cdot A4 + 0.020984855804701359869\cdot A5 - 0.029230079477427371833 = 0$

$0.057160616778821060009\cdot A1 + -0.003050870449409109874 2\cdot A2 + 0.161642210357813410 15\cdot A3 + 0.020984855804701359869\cdot A4 + 0.155031635124566430 28\cdot A5 + 0.031368217221899587108 = 0$

Из решения системы уравнений (4.24) находим

$$\text{Find}(A1, A2, A3, A4, A5) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.27506277379844769489 \\ 0.13647075408241796115 \\ -0.053023919453724673339 \\ 0.050423002431245333745 \\ -0.049772555869474193351 \end{pmatrix}.$$

8. Визуализация результатов расчета представлена на рисунке 4.4.

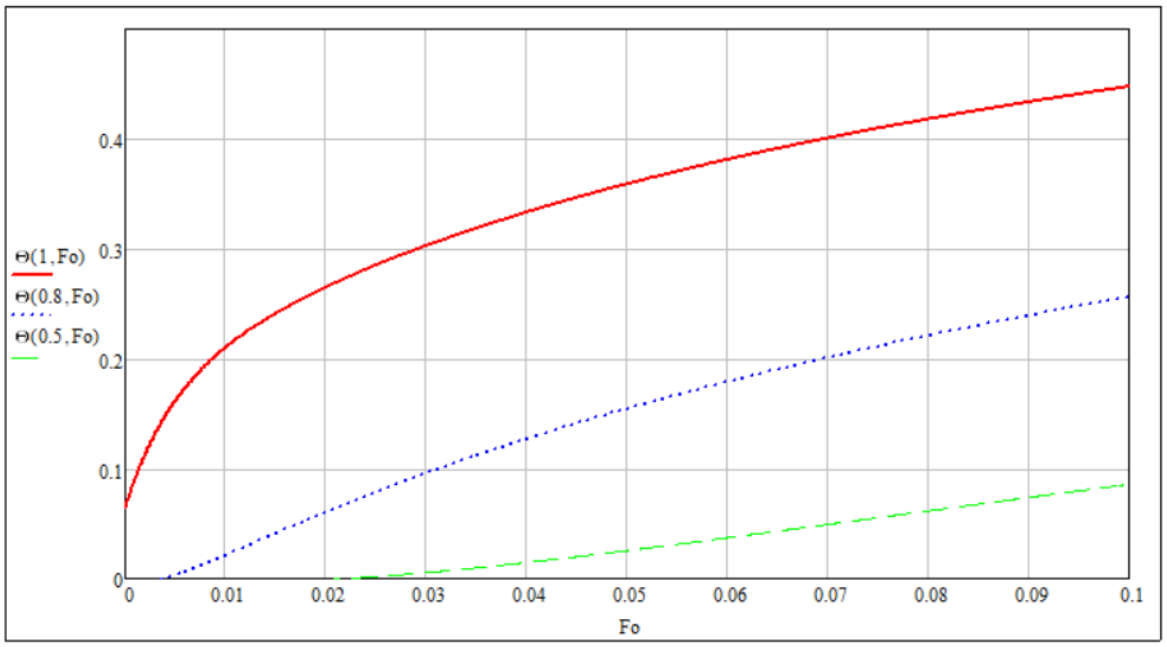


Рис. 4.4. Распределение температуры

9. Применительно к расчету температуры стенки реактора пиролиза метана расчет повторяется при $\mathrm{Bi}_1 = 0{,}2$; $\mathrm{Bi}_2 = 1{,}0$:

$$\psi(\xi) := 1 + b1\cdot\xi^1 + b2\cdot\xi^2 + b3\cdot\xi^3 + b4\cdot\xi^4 + b5\cdot\xi^5 + b6\cdot\xi^6$$

$$Bi1 := 0.2$$

$$Bi2 := 1$$

Given

$$b1 - Bi1 = 0$$

$$Bi2 + b1 + 2\cdot b2 + 3\cdot b3 + 4\cdot b4 + 5\cdot b5 + 6\cdot b6 + Bi2\cdot b1 + Bi2\cdot b2 + Bi2\cdot b3 + Bi2\cdot b4 + Bi2\cdot b5 + Bi2\cdot b6 = 0$$

$$2\cdot b2 + \nu = 0$$

$$2.0\cdot b2 + 1.2\cdot b3 + 0.48\cdot b4 + 0.16\cdot b5 + 0.048\cdot b6 + \nu + 0.2\cdot b1\cdot\nu + 0.04\cdot b2\cdot\nu + 0.008\cdot b3\cdot\nu + 0.0016\cdot b4\cdot\nu + 0.00032\cdot b5\cdot\nu + 0.000064\cdot b6\cdot\nu = 0$$

$$2.0\cdot b2 + 4.8\cdot b3 + 7.68\cdot b4 + 10.24\cdot b5 + 12.288\cdot b6 + \nu + 0.8\cdot b1\cdot\nu + 0.64\cdot b2\cdot\nu + 0.512\cdot b3\cdot\nu + 0.4096\cdot b4\cdot\nu + 0.32768\cdot b5\cdot\nu + 0.262144\cdot b6\cdot\nu = 0$$

$$2.0\cdot b2 + 6.0\cdot b3 + 12.0\cdot b4 + 20.0\cdot b5 + 30.0\cdot b6 + \nu + b1\cdot\nu + b2\cdot\nu + b3\cdot\nu + b4\cdot\nu + b5\cdot\nu + b6\cdot\nu = 0$$

$$\mathrm{Find}(b1, b2, b3, b4, b5, b6) \rightarrow \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.5\cdot\nu \\ -\dfrac{1.0\cdot\left(660.0\cdot\nu^4 - 150516.0\cdot\nu^3 + 7.214813e6\cdot\nu^2 - 7.17525e7\cdot\nu + 6.3e7\right)}{21380.0\cdot\nu^2 - 160.0\cdot\nu^3 + 993750.0\cdot\nu - 1.6875e7} \\ \dfrac{790.0\cdot\nu^4 - 198697.0\cdot\nu^3 + 1.2076547e7\cdot\nu^2 - 1.28506875e8\cdot\nu + 1.141875e8}{10690.0\cdot\nu^2 - 80.0\cdot\nu^3 + 496875.0\cdot\nu - 8.4375e6} \\ -\dfrac{1.0\cdot\left(300.0\cdot\nu^4 - 77200.0\cdot\nu^3 + 4.938165e6\cdot\nu^2 - 5.2983e7\cdot\nu + 4.725e7\right)}{4276.0\cdot\nu^2 - 32.0\cdot\nu^3 + 198750.0\cdot\nu - 3.375e6} \\ \dfrac{100.0\cdot\nu^4 - 25680.0\cdot\nu^3 + 1.648555e6\cdot\nu^2 - 1.7661e7\cdot\nu + 1.575e7}{4276.0\cdot\nu^2 - 32.0\cdot\nu^3 + 198750.0\cdot\nu - 3.375e6} \end{bmatrix}$$

$$\psi(\xi) := 1 + b1\cdot\xi^1 + b2\cdot\xi^2 + b3\cdot\xi^3 + b4\cdot\xi^4 + b5\cdot\xi^5 + b6\cdot\xi^6$$

$$\psi(\xi) \to 0.2\cdot\xi - \frac{\xi^3\cdot\left(-7.17525e7\cdot\nu + 7.214813e6\cdot\nu^2 + -150516.0\cdot\nu^3 + 660.0\cdot\nu^4 + 6.3e7\right)}{993750.0\cdot\nu + 21380.0\cdot\nu^2 + -160.0\cdot\nu^3 - 1.6875e7} + \frac{\xi^6\cdot\left(-1.7661e7\cdot\nu + 1\right.}{198750.}$$

$$\int_0^1 \frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \nu\cdot\psi(\xi)\,d\xi \;\left|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{solve},\nu\\ \text{float},6\end{array}\right.\to \begin{pmatrix}230.278\\ 160.462\\ 39.7839\\ 12.0857\\ 0.979823\end{pmatrix}.$$

$T0 := 20$

$T1 := 1200$

$T2 := 900$

$$D = \frac{T0 - T1}{T2 - T0} \to D = -\frac{59}{44}$$

$$D := -\frac{59}{44}$$

$$\Theta s(\xi) := \frac{Bi2 + Bi2\cdot D}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2} - D + \frac{Bi1\cdot Bi2\cdot\xi\cdot(D+1)}{Bi1 + Bi2 + Bi1\cdot Bi2}\;\left|\begin{array}{l}\text{substitute},Bi2 = 1\\ \text{substitute},Bi1 = 0.2\\ \text{float},4\end{array}\right.\to -0.0487\cdot\xi + 1.097$$

$$\Theta s(\xi) := -0.0487\cdot\xi + 1.097$$

$$\int_0^1 (\Theta n(\xi,Fo) + \Theta s(\xi))\cdot\psi 1(\xi)\,d\xi \;\left|\begin{array}{l}\text{substitute},Fo = 0\\ \text{substitute},\nu = \nu 1\end{array}\right.\to 0.8853289385247973 6378\cdot A1 + -0.0000616886700042787 5708\cdot A2 + 0.0013967328879822618289\cdot A3 + 0.0037283426778454411593\cdot A4 + -$$

$$\int_0^1 (\Theta n(\xi,Fo) + \Theta s(\xi))\cdot\psi 2(\xi)\,d\xi \;\left|\begin{array}{l}\text{substitute},Fo = 0\\ \text{substitute},\nu = \nu 2\end{array}\right.\to -0.0000616886700042787 5708\cdot A1 + 0.5469267727639184 6402\cdot A2 + -0.0013134227601109312235\cdot A3 + 0.0335945503378033 77591\cdot A4 + 0.0$$

$$\int_0^1 (\Theta n(\xi,Fo) + \Theta s(\xi))\cdot\psi 3(\xi)\,d\xi \;\left|\begin{array}{l}\text{substitute},Fo = 0\\ \text{substitute},\nu = \nu 3\end{array}\right.\to 0.0013967328879822618289\cdot A1 + -0.0013134227601109312235\cdot A2 + 0.5163551138955222 8444\cdot A3 + 0.0201592790405760 14448\cdot A4 + 0.229$$

$$\int_0^1 (\Theta n(\xi,Fo) + \Theta s(\xi))\cdot\psi 4(\xi)\,d\xi \;\left|\begin{array}{l}\text{substitute},Fo = 0\\ \text{substitute},\nu = \nu 4\end{array}\right.\to 0.0037283426778454411593\cdot A1 + 0.0335945503378033 77591\cdot A2 + 0.0201592790405760 14448\cdot A3 + 0.2620096583673704 5026\cdot A4 + -0.0166$$

$$\int_0^1 (\Theta n(\xi,Fo) + \Theta s(\xi))\cdot\psi 5(\xi)\,d\xi \;\left|\begin{array}{l}\text{substitute},Fo = 0\\ \text{substitute},\nu = \nu 5\end{array}\right.\to -0.0099132580302728294101\cdot A1 + 0.0066628275656177 63747\cdot A2 + 0.2290591262996962 6897\cdot A3 + -0.0166218099736333 66774\cdot A4 + 0.229$$

Given

$0.8853289385247973 6378\cdot A1 + -0.0000616886700042787 5708\cdot A2 + 0.0013967328879822618289\cdot A3 + 0.0037283426778454411593\cdot A4 + -0.0099132580302728294101\cdot A5 + 1.0058188766324570364 = 0$

$-0.0000616886700042787 5708\cdot A1 + 0.5469267727639184 6402\cdot A2 + -0.0013134227601109312235\cdot A3 + 0.0335945503378033 77591\cdot A4 + 0.0066628275656177 63747\cdot A5 - 0.0573634048784779 19514 = 0$

$0.0013967328879822618289\cdot A1 + -0.0013134227601109312235\cdot A2 + 0.5163551138955222 8444\cdot A3 + 0.0201592790405760 14448\cdot A4 + 0.2290591262996962 6897\cdot A5 + 0.0319137863810221 10205 = 0$

$0.0037283426778454411593\cdot A1 + 0.0335945503378033 77591\cdot A2 + 0.0201592790405760 14448\cdot A3 + 0.2620096583673704 5026\cdot A4 + -0.0166218099736333 66774\cdot A5 - 0.0037404484309664 648031 = 0$

$-0.0099132580302728294101\cdot A1 + 0.0066628275656177 63747\cdot A2 + 0.2290591262996962 6897\cdot A3 + -0.0166218099736333 66774\cdot A4 + 0.2294025742388471957\cdot A5 + 0.0063785324522610674177 = 0$

$$\text{Find}(A1,A2,A3,A4,A5)\;\text{float},6 \to \begin{pmatrix}-1.13649\\ 0.103956\\ -0.0436337\\ 0.0182529\\ -0.0350449\end{pmatrix}.$$

10. Визуализация результатов расчета применительные к расчету температуры стенки реактора пиролиза метана представелена на рисунке 4.5.

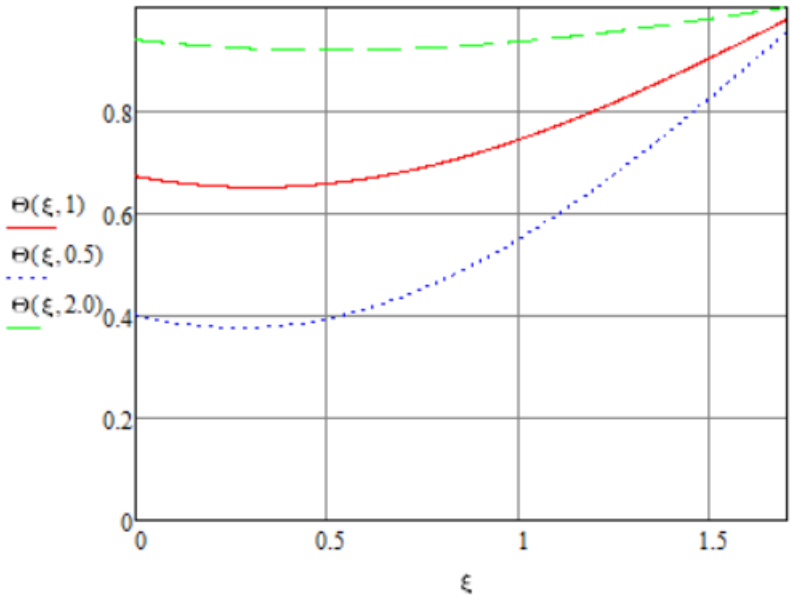


Рис. 4.5. Распределение температуры применительно к расчету температуры стенки реактора пиролиза метана

4.3. Реализация метода решения нелинейной задачи теплопроводности с использованием дополнительной искомой функции и интеграла теплового баланса

Программный комплекс для численно – аналитического решения задач исследования условий теплового взрыва в нелинейных задачах теплопроводности, разработанный в программе Mathcad, реализует комбинированный подход, сочетающий аналитические методы и численное моделирование. Основной целью программы является определение распределения температуры внутри тела (в данном случае — пластины) во времени с учётом нелинейностей в виде:

1) зависимость коэффициента теплопроводности от температуры;
2) наличие нелинейного источника тепла.

Математическая постановка задачи имеет вид (2.45) – (2.48) в п. 2.2 и 2.3.

1. Запишем математическую постановку задачи в безразмерном виде:

Математическая постановка задачи в безразмерном виде:

$$\frac{d}{dFo}\Theta(\xi,Fo) = \frac{d}{d\xi}\left[(1+\beta\cdot\Delta t\cdot\Theta(\xi,Fo))\cdot\left(\frac{d}{d\xi}\Theta(\xi,Fo)\right)\right] + Po\cdot(1+\gamma\cdot\Delta t\cdot\Theta(\xi,Fo))$$

Начальное условие (НУ): $\Theta(\xi,0) = 0$,

Граничные условия (ГУ):

$\Theta(0,Fo) = 1$,

$\frac{d}{d\xi}\Theta(1,Fo) = 0$,

2. Для получения решения нелинейной задачи используем приближённый метод, основанный на следующих ключевых идеях:

Введем дополнительную функцию $q(\mathrm{Fo})$ последовательно в точках: $\xi = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1{,}0$. Найдем сначала решение при задании дополнительной функции в точке $\xi = 0{,}25$, то есть $q(\mathrm{Fo}) = \Theta\ (0{,}25;\mathrm{Fo})$, характеризующая изменение температуры в любой точке пластины (2.49). Это позволяет свести исходную задачу с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $q(\mathrm{Fo})$, также для п. 2.3

дополнительная функция может приниматься ввиде производной от температуры по пространственной координате (в точках: $\xi = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1{,}0$).

Введем дополнительную искомую функцию (ДИФ): $q(Fo) = \Theta\left(\frac{1}{4}, Fo\right)$,

Решение задачи (2.45) – (2.48) с учетом (2.49) примем в виде (2.50):

$$\Theta(\xi, Fo) \equiv 1 - b1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \xi}{2}\right).$$

3. Проверим выполнение граничных условий:

$$\Theta(\xi, Fo)\ \text{substitute}, \xi = 0 \ \rightarrow 1,$$

$$\frac{d}{d\xi}\Theta(\xi, Fo)\ \text{substitute}, \xi = 1 \ \rightarrow 0,$$

4. Для получения решения задачи (2.45) – (2.48) в первом приближении подставим (2.50) (ограничившись одним членом ряда) в (2.49). Относительно $b_1(q)$ получаем алгебраическое уравнение, из решения которого находим:

$$b1 := -\frac{2 \cdot (q(Fo) - 1)}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

5. Соотношение (2.50) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) \equiv 1 - \left[-\frac{2 \cdot (q(Fo) - 1)}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \xi}{2}\right).$$

6. Осредняя уравнение (2.45) по переменной ξ, находим интеграл теплового баланса, с помощью которого уравнение в частных производных сводится к обыкновенному уравнению для $q(\mathrm{Fo})$:

$$\int_0^1 \frac{d}{dFo}\Theta(\xi, Fo) - \left[\frac{d}{d\xi}\left[(1 + \beta \cdot \Delta t \cdot \Theta(\xi, Fo)) \cdot \left(\frac{d}{d\xi}\Theta(\xi, Fo)\right)\right]\right] - Po \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta t \cdot \Theta(\xi, Fo))\, d\xi$$

$$\frac{4 \cdot \frac{d}{dFo}q(Fo)}{\pi \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}} - \left[-\frac{\pi \cdot (\beta \cdot \Delta t + 1) \cdot (q(Fo) - 1)}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\right] - \frac{Po \cdot \left(\pi - \frac{4 \cdot \gamma \cdot \Delta t}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + \gamma \cdot \pi \cdot \Delta t + \frac{4 \cdot \gamma \cdot \Delta t \cdot q(Fo)}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\right)}{\pi} = 0$$

7. Его решение:

$$q(Fo) := \frac{\pi \cdot \left(Po \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} + \gamma \cdot Po \cdot \Delta t \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\pi^2 + \pi^2 \cdot \beta \cdot \Delta t - 4 \cdot \gamma \cdot Po \cdot \Delta t} + 1 + C \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo}{4}} \cdot e^{\gamma \cdot Fo \cdot Po \cdot \Delta t} \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo \cdot \beta \cdot \Delta t}{4}} .$$

Решение задачи в первом приближении принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot \xi}{2}\right) \cdot \left[\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(Po \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} + \gamma \cdot Po \cdot \Delta t \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\pi^2 + \pi^2 \cdot \beta \cdot \Delta t - 4 \cdot \gamma \cdot Po \cdot \Delta t} + 2 \cdot C \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo}{4}} \cdot e^{\gamma \cdot Fo \cdot Po \cdot \Delta t} \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo \cdot \beta \cdot \Delta t}{4}}\right]}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + 1 .$$

8. Для определения C составим невязку условия (2.46) и потребуем выполнения ее ортогональности к координатной функции первого приближения:

$$\left(\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \xi}{2}\right) d\xi\right) \left|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{solve, C}\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow -\frac{2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pi} - \frac{\pi \cdot Po \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} + \gamma \cdot \pi \cdot Po \cdot \Delta t \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pi^2 + \pi^2 \cdot \beta \cdot \Delta t - 4 \cdot \gamma \cdot Po \cdot \Delta t}$$

$$C := -\frac{2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pi} - \frac{\pi \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot Po \cdot (\gamma \cdot \Delta t + 1)}{\pi^2 + \pi^2 \cdot \beta \cdot \Delta t - 4 \cdot \gamma \cdot Po \cdot \Delta t} .$$

9. Выполняется проверка решения и выполнения граничных условий:

$$q1pr(Fo) := \frac{\pi \cdot \left(Po \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} + \gamma \cdot Po \cdot \Delta t \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\pi^2 + \pi^2 \cdot \beta \cdot \Delta t - 4 \cdot \gamma \cdot Po \cdot \Delta t} + 1 + C \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo}{4}} \cdot e^{\gamma \cdot Fo \cdot Po \cdot \Delta t} \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo \cdot \beta \cdot \Delta t}{4}}$$

$$\Theta 1pr(\xi, Fo) \equiv \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot \xi}{2}\right) \cdot \left[\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(Po \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} + \gamma \cdot Po \cdot \Delta t \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\pi^2 + \pi^2 \cdot \beta \cdot \Delta t - 4 \cdot \gamma \cdot Po \cdot \Delta t} + 2 \cdot C \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo}{4}} \cdot e^{\gamma \cdot Fo \cdot Po \cdot \Delta t} \cdot e^{-\frac{\pi^2 \cdot Fo \cdot \beta \cdot \Delta t}{4}}\right]}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + 1$$

Проверка:

$$\Theta 1pr(\xi, Fo) - 1 \text{ substitute}, \xi = 0 \rightarrow 0$$

$$\frac{d}{d\xi} \Theta 1pr(\xi, Fo) \text{ substitute}, \xi = 1 \rightarrow 0$$

10. Визуализация результатов представлена на рисунках 4.6 – 4.8. Построенные графики показывают, как температура изменяется по толщине пластины для разных моментов времени. Графики помогают визуализировать режимы теплообмена (стационарный режим или тепловой взрыв).

$\gamma := 0.1 \quad \beta := 0.1 \quad Po := 5 \quad \Delta t := 10$

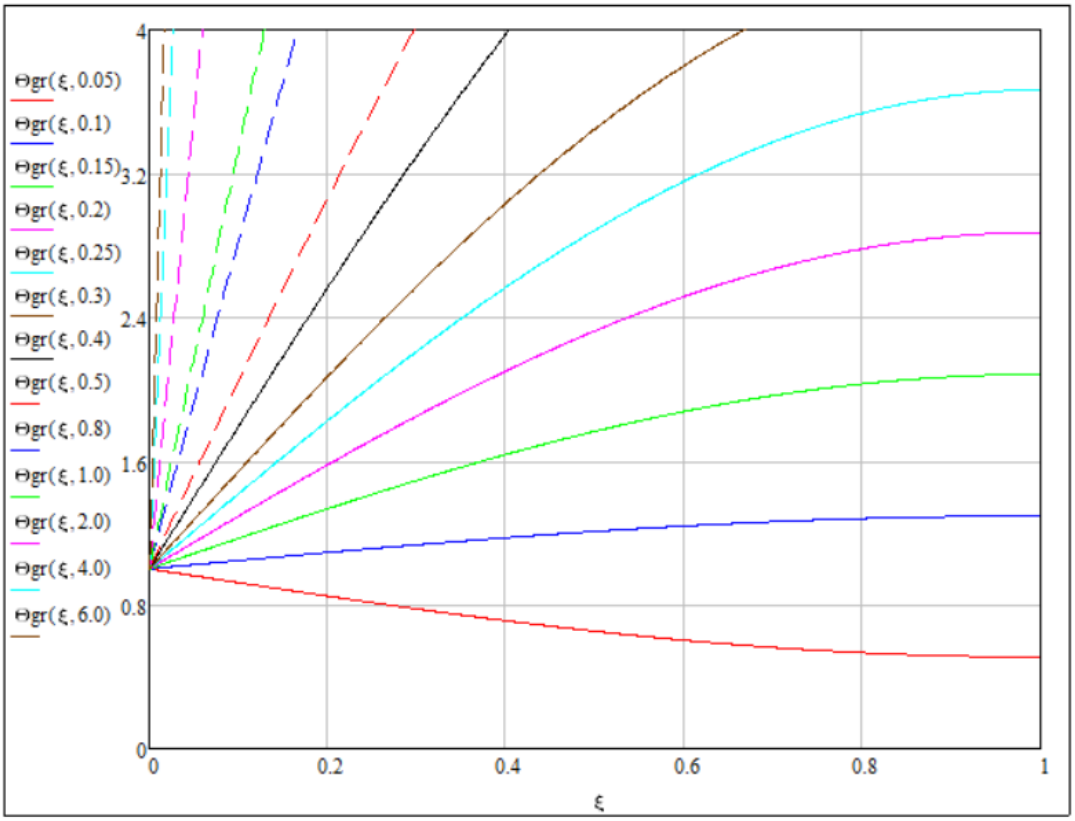


Рис. 4.6. График иллюстрирует бесконечное возрастание температуры во времени (тепловой взрыв)

$\gamma := 0 \quad \beta := 0 \quad Po := 0 \quad \Delta t := 10$

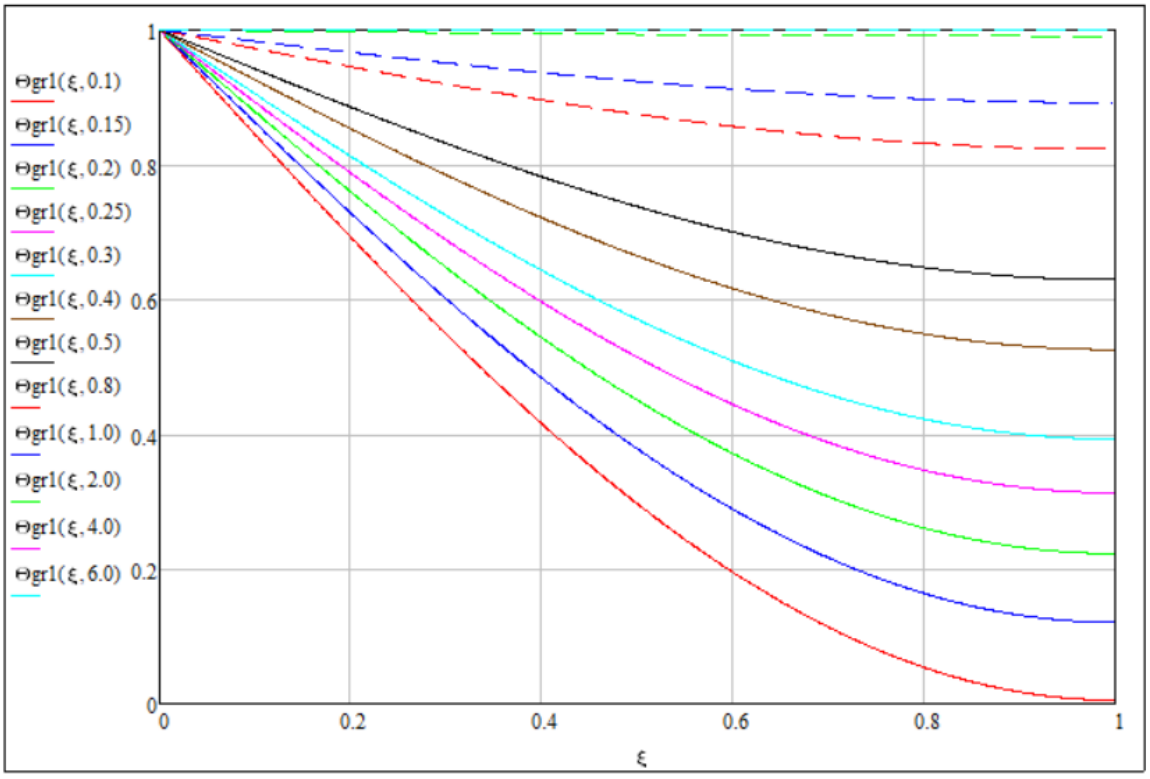


Рис. 4.7. График распределения температуры во времени (без источника теплоты)

$\gamma := 1 \quad \beta := 0.1 \quad Po := 0.1 \quad \Delta t := 10$

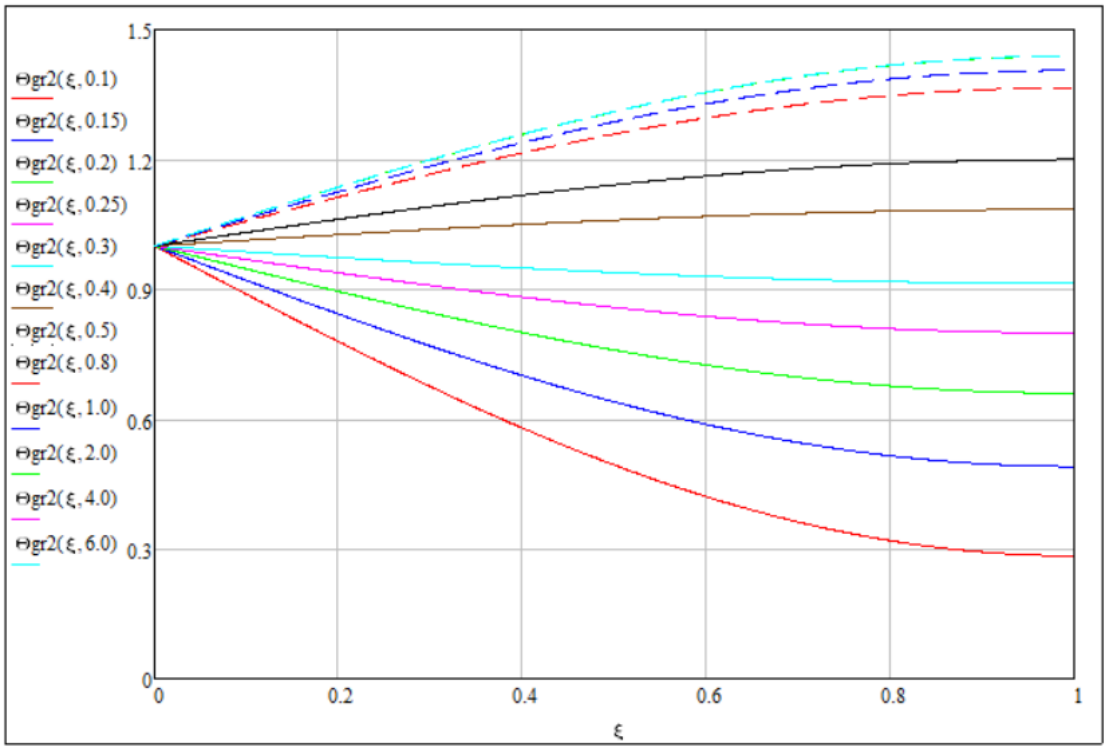


Рис. 4.8. График иллюстрирует стационарный режим теплообмена (температура стабилизируется, система переходит в стационарный режим)

11. На рисунке 4.9 представлено сравнение численного решения задачи теплопроводности с аналитическим приближением, полученным методом введения дополнительной функции. Решение было выполнено для случая линейной задачи без нелинейных эффектов, когда параметры системы заданы следующим образом: $\Theta(\xi, Fo)$ – численное решение задачи; $\Theta gr1(\xi, Fo)$ – полученное решение в п.п. 2.2.

$\beta := 0 \quad \gamma := 0 \quad Po := 0 \quad \Delta t := 10$

Численное решение

Given

$$\Theta_{Fo}(\xi, Fo) = (1 + \beta \cdot \Delta t \cdot \Theta(\xi, Fo)) \cdot \Theta_{\xi\xi}(\xi, Fo) + Po \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta t \cdot \Theta(\xi, Fo))$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0$$

$$\Theta(0, Fo) = 1$$

$$\Theta_{\xi}(1, Fo) = 0$$

$$\Theta := Pdesolve\left[\theta, \xi, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Fo, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 100, 100\right]$$

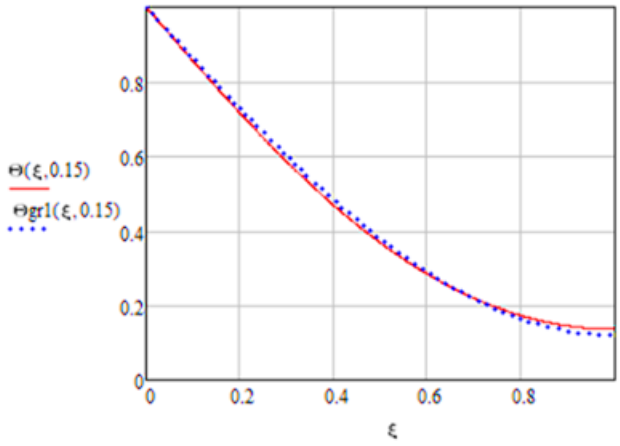


Рис. 4.9. Сравнение результатов численного и приближенно-аналитического решения в момент времени Fo = 0.15

На графике (рис. 4.9) показано распределение температуры $\Theta(\xi, Fo)$ вдоль координаты ξ в момент времени $Fo = 0.15$. Численное решение $\Theta(\xi, 0.15)$ сравнивается с аналитическим приближением $\Theta gr1(\xi, 0.15)$, полученным методом введения дополнительной функции. Анализ результатов расчетов свидетельствует об их практическом совпадении.

4.4. Реализация программного комплекса для определения мощности внутреннего источника тепла

Программный комплекс для определения мощности внутреннего источника тепла по температурному отклику был разработан и реализован на языке Python. Выбор данного языка обусловлен наличием развитых библиотек для выполнения инженерных и научных расчётов, удобством реализации математических моделей, а также возможностью решения нелинейных уравнений численными методами. Используется математическая модель теплопроводности в одномерной постановке, учитывающая изменение температуры во времени и пространстве. На основе заданных физических параметров (таких как начальная и конечная температура, теплопроводность материала, толщина стенки, коэффициент температуропроводности) программа вычисляет число Фурье (характеризующее время теплового процесса), а затем с помощью численного метода решает нелинейное уравнение для нахождения числа Померанцева, связанного с мощностью источника тепла. После этого рассчитывается фактическая мощность источника тепла (п. 2.2.).

Программа позволяет эффективно и с высокой точностью находить искомую величину, что может быть использовано при анализе тепловых процессов в инженерных системах, например при исследовании нагрева конструкций или материалов под воздействием внутренних источников тепла, инициируемых электромагнитным полем.

В программе использованы следующие внешние библиотеки:

1. NumPy — для выполнения математических операций, вычисления корней, экспоненциальных функций и работы с числовыми выражениями;

2. SciPy.optimize — для применения численного метода решения нелинейного уравнения с использованием функции fsolve.

Алгоритм работы программы, реализованной на языке Python, представлен на рисунке 4.10.

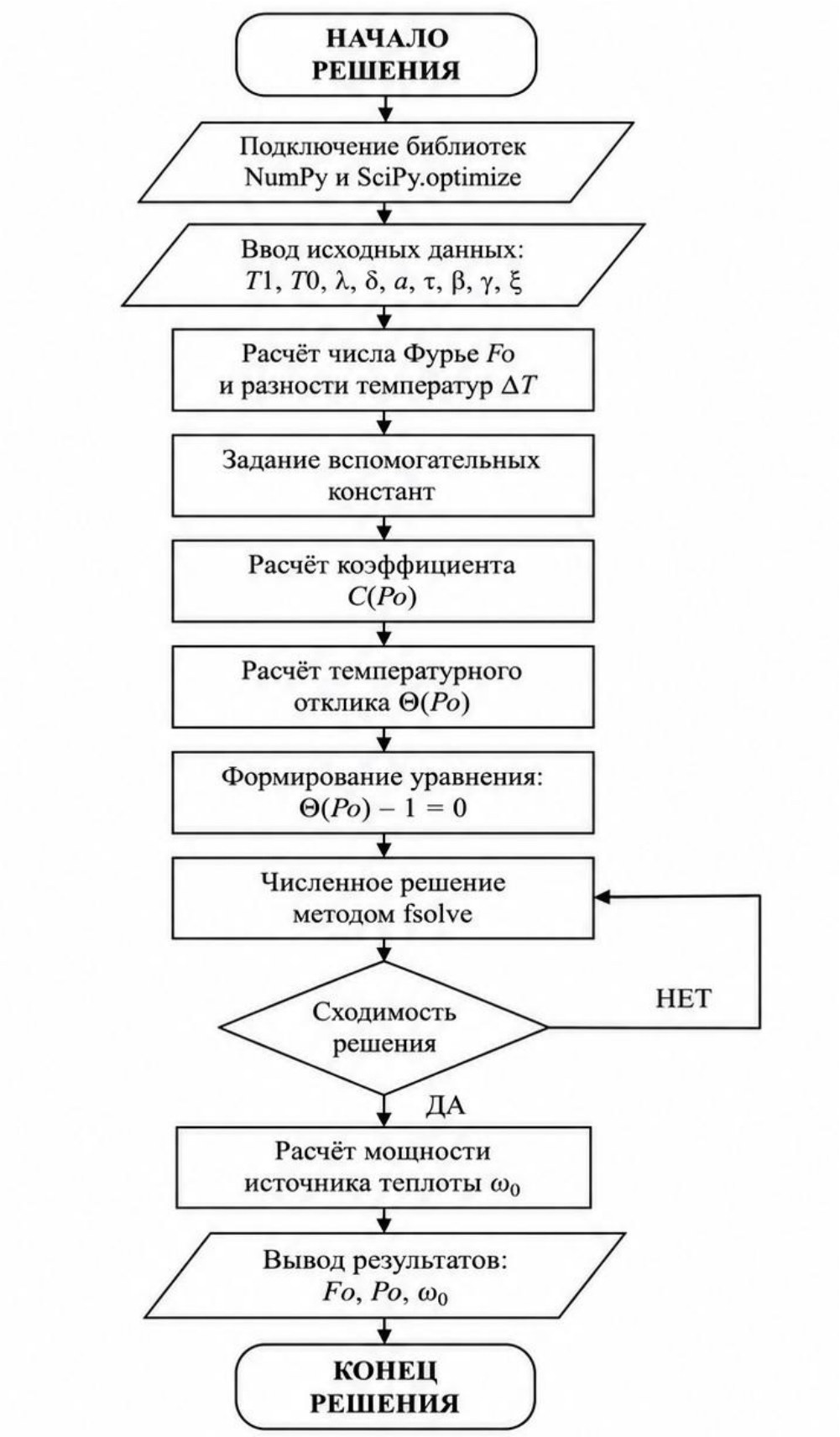


Рис. 4.10. Алгоритм работы программы для определения мощности внутреннего источника тепла по температурному отклику, реализованной на языке Python.

1. Физические параметры задачи используются для расчёта безразмерных чисел и уравнений, описывающих тепловой процесс. Они задают условия конкретной инженерной или физической задачи:

```
# === Параметры задачи ===
T1 = 1000       # °C - Конечная температура
T0 = 20         # °C - Начальная температура
lambda0 = 20    # Вт/(м·К) - Теплопроводность
delta = 0.005   # м - Толщина стенки
a = 1e-6        # м²/с -  Коэффициент температуропроводности
tau = 60        # время с
beta = 0.001    # Коэффициент изменения теплопроводности
gamma = 0       # по условию gamma = 0
xi = 1          # точка на поверхности
```

2. Рассчитывается число Фурье, оно используется в последующих формулах для учёта временно̀го фактора в уравнении теплопроводности. Инициализируются дополнительные константы, применяющиеся при расчёте температурного отклика. Вычисляется разность температур:

```
# === Вычисляем число Фурье ===
Fo = a * tau / delta**2

# Разность температур
Delta_t = T1 - T0

# === Константы ===
sqrt_term = np.sqrt(2 - np.sqrt(2))
pi = np.pi
```

3. Решение нелинейного уравнения для нахождения числа Померанцева (Po), которое связано с мощностью источника тепла. Число Померанцева связывает мощность внутреннего источника тепла с другими параметрами системы.

Рассчитывается вспомогательный коэффициент C, входящий в модель (используется функция calculate_C(Po)):

```
# === Функция для расчёта C ===
def calculate_C(Po):
    term1 = -(2 * sqrt_term) / pi
    numerator = pi * sqrt_term * Po * (gamma * Delta_t + 1)
    denominator = pi**2 + pi**2 * beta * Delta_t - 4 * gamma * Po * Delta_t
    term2 = numerator / denominator
    return term1 - term2
```

Вычисляется относительная температура на поверхности (безразмерная величина Theta) (используется функция theta_func(Po)):

```
def theta_func(Po):
    # Экспоненциальный множитель
    exponent = (-pi**2 / 4) * Fo * (1 + beta * Delta_t)
    exp_value = np.exp(exponent)
    numerator_p1 = 2 * pi * Po * sqrt_term
    denominator_p1 = pi**2 + pi**2 * beta * Delta_t
    part1 = numerator_p1 / denominator_p1
    C = calculate_C(Po)
    part2 = 2 * C * exp_value
    total = (part1 + part2) / sqrt_term

    return 1 + total
```

Формируется уравнение, которое необходимо решить:

```
def equation(Po):
    return theta_func(Po) - 1
```

Используется численный метод (fsolve) для нахождения значения Po, при котором theta_func(Po) == 1.

```
Po_solution = fsolve(equation, Po_initial_guess, xtol=1e-12)[0]
```

4. На основе найденного числа Померанцева рассчитывается мощность источника тепла:

```
omega0 = Po_solution * lambda0 * Delta_t / delta**2
```

5. Вывод результатов:

```
✅ Результаты расчёта:
Число Фурье (Fo): 2.400000
Число Померанцева (Po): 0.000032029989733
Мощность источника (ω₀): 25111.511950933563639 Вт/м³
```

4.5. Реализация программного комплекса для расчёта теплообменной поверхности калорифера

Программный комплекс для расчёта теплообменной поверхности калорифера реактора пиролиза метана с целью охлаждения дымовых газов был разработан и реализован на языке Python для определения площади теплообменной поверхности калорифера на основе заданных параметров теплопередачи. Программа использует физические зависимости и инженерные формулы для последовательного расчёта необходимых характеристик теплообмена.

Выбор языка Python обусловлен удобством записи расчётных зависимостей, наглядностью структуры программы и возможностью последовательной реализации инженерного алгоритма. Все вычисления выполняются по аналитическим и инженерным формулам средствами базового синтаксиса Python без использования дополнительных специализированных библиотек.

Основной расчётный блок программы реализован в виде функции calorifer_calculation(), в которой последовательно выполняются все этапы расчёта теплообменной поверхности калорифера.

Программа позволяет эффективно и с высокой точностью рассчитывать искомые величины, что может быть использовано при проектировании теплообменного оборудования, а также при анализе тепловых процессов в инженерных системах.

Алгоритм работы программы для определения площади теплообменной поверхности калорифера, реализованной на языке Python, представлен на рисунке 4.11.

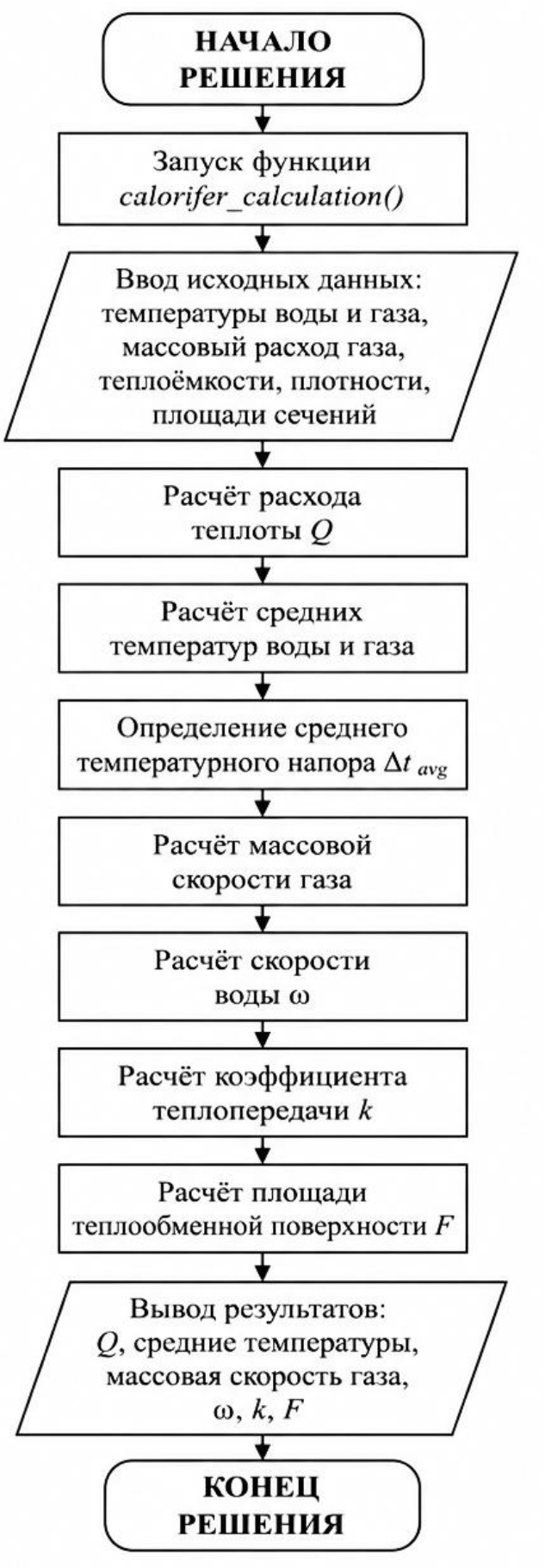


Рис. 4.11. Алгоритм работы программы для определения площади теплообменной поверхности калорифера, реализованной на языке Python.

1. Задаются физические параметры задачи, которые описывают: начальную и конечную температуры теплоносителей, массовый расход газа, теплоёмкость, плотность и площади сечений:

```
# Исходные данные
txs = 90          # Температура воды на выходе, °C
tins = 20          # Температура воды на входе, °C
t_ng = 700         # Температура газа на входе, °C
t_kt = 50         # Температура газа на выходе, °C
G_kg_s = 0.010      # Массовый расход газа, кг/с
c_gas = 850        # Удельная теплоемкость газа (CO2), Дж/(кг•°C)
f_gas = 0.25        # Площадь сечения для газа, м²
f_water = 0.0005     # Площадь сечения для воды, м²
c_water = 4200     # Удельная теплоемкость воды, Дж/(кг•°C)
rho_water = 1000   # Плотность воды, кг/м³
rho_CO2 = 1.977    # Плотность CO2 при средних условиях, кг/м³
```

2. Рассчитывается расход тепла на калорифер (Q). Определяется общее количество теплоты, передаваемой от газа к воде:

```
Q = G_kg_s * c_gas * (t_ng - t_kt)
print(f'1. Расход тепла на калорифер Q = {Q:.2f} Вт')
```

3. Вычисляются средние температуры воды и газа, для определения среднего температурного напора между теплоносителями:

```
t_water_avg = (txs + tins) / 2
t_gas_avg = (t_ng + t_kt) / 2
print('2. Средние температуры:')
print(f'   - Вода: {t_water_avg:.1f} °C')
print(f'   - Газ: {t_gas_avg:.1f} °C')
```

4. Рассчитывается массовая скорость газа, используется для определения коэффициента теплопередачи:

```
mass_velocity_gas = G_kg_s / f_gas  # кг/(м²•с)
print(f'3. Массовая скорость газа: {mass_velocity_gas:.4f} кг/(м²•с)')
```

5. Вычисляется скорость воды (ω), которая характеризует скорость движения воды внутри теплообменника:

```
omega = Q / (c_water * rho_water * f_water * (txs - tins))
print(f'4. Скорость воды: {omega:.8f} м/с')
```

6. Расчёт коэффициента теплопередачи (k), учитывается интенсивность теплообмена между теплоносителями:

```
k = 15.2 * (mass_velocity_gas)**0.331 * (omega)**0.166
print(f'5. Коэффициент теплопередачи k = {k:.4f} Вт/(м²•°C)')
```

7. Расчёт площади теплообменной поверхности (F), выполняется определение необходимой площади теплообменной поверхности калорифера:

```
delta_t_avg = t_gas_avg - t_water_avg
F = Q / (k * delta_t_avg)
print(f'6. Поверхность нагрева F = {F:.4f} м²')
```

8. Результаты расчета:

```
Итоговые результаты:
Расход тепла Q = 5525.00 Вт
Средняя температура воды = 55.0 °C
Средняя температура газа = 375.0 °C
Массовая скорость газа = 0.0400 кг/(м²•с)
Скорость воды ω = 0.03758503 м/с
Коэффициент теплопередачи k = 3.0379 Вт/(м²•°C)
Поверхность нагрева F = 5.6833 м²
```

Выводы

1. Разработан численно – аналитический метод решения задач теплопроводности с несимметричными граничными условиями третьего рода, позволяющий сводить решение исходного уравнения к системе алгебраических уравнений, полученных в точках коллокации. Выполнение начального условия также сводится к системе алгебраических уравнений. Разработанный метод был применён для расчёта стенки реактора пиролиза метана, что позволило определить температуру на внутренней его поверхности, уровень которой определяет процесс пиролиза и отложения углерода на стенках.

2. Используя дополнительные функции и условия на границе, решены нелинейные задачи с температурно-зависящим источником теплоты путем сведения уравнения в частных производных к обыкновенному уравнению для дополнительной функции. Из его решения находятся собственные числа, которые в классических методах находятся из задачи Штурма – Лиувилля. Полученное решение использовано для оценки мощности теплового источника, при которой температура стенки реактора не превышает заданной величины при электромагнитном нагреве. Тепловой источник инициируется индуктором, формирующим электромагнитное поле.

3. Используя дополнительную функцию и дополнительные условия, найдено решение задачи теплопроводности с источником теплоты, в частных случаях совпадающее с точным решением, полученным с помощью классических методов. Следует, отметить, что процесс получения решения классическими методами является значительно более трудоемким по сравнению с разработанным в диссертации методом. С целью теоретического обоснования метода доказана теорема, согласно которой выполнение уравнения и дополнительных граничных условий на выбранной граничной стороне расчетной области при большом числе приближений приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, не прибегая к его непосредственному интегрированию по пространственной переменной.

4. Разработаны нелинейные математические модели динамического и теплового пограничных слоев при переменных по поперечной координате вязкости и температуропроводности газа. Их использование показало наличие застойных зон вблизи стенки. Так как температура стенки больше температуры газа, то, следовательно, газ в застойных зонах этой области имеет максимальную температуру, что способствует интенсивному отложению углерода на внутренней поверхности стенки реактора.

5. Разработаны программные комплексы для численно – аналитического решения следующих задач: моделирование нестационарного теплообмена в реакторах с граничными условиями третьего рода; решение нелинейной задачи теплопроводности с использованием дополнительной искомой функции и интеграла теплового баланса; определение мощности внутреннего источника теплоты по температурному отклику; расчет теплообменной поверхности калорифера реактора пиролиза метана с целью охлаждения дымовых газов.

Список используемой литературы

1. Абишева, Л. С. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса и термоупругости на основе параболических и гиперболических уравнений с учётом релаксационных явлений: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Л. С. Абишева. — Самара, 2017. — 159 с.

2. Аверин, Б. В. Математическое моделирование температурных полей и термических напряжений в многослойных радиоукрытиях мощных передающих антенн: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Б. В. Аверин. — Москва, 1999. — 22 с.

3. Акаев, А. В. К вопросу о повышении точности первых приближений метода Л. В. Канторовича в применении к краевым задачам стационарной теплопроводности / А. В. Акаев, Г. Н. Дульнев // Известия АН СССР. Серия: Энергетика и транспорт. — 1972. — № 1. — С. 154–158.

4. Алифанов, О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. — Москва: Машиностроение, 1988. — 297 с.

5. Алифанов, О. М. Выбор приближённого решения обратной задачи теплопроводности / О. М. Алифанов, И. Е. Балашова // Инженерно-физический журнал. — 1985. — Т. 48, № 5. — С. 851–860.

6. Антимонов, М. С. Численно-аналитические методы решения задачи теплопроводности на основе ортогональных методов взвешенных невязок: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / М. С. Антимонов. — Ульяновск, 2008. — 24 с.

7. Антимонов, М. С. Аналитические решения задач теплопроводности для цилиндра и шара на основе определения фронта температурного возмущения / М. С. Антимонов, В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 4. — С. 681–692.

8. Баранов, Н. Н. Нетрадиционные источники и методы преобразования энергии / Н. Н. Баранов. — Москва: Издательский дом МЭИ, 2012. — 384 с.

9. Беляев, Н. М. Методы нестационарной теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. — Москва: Высшая школа, 1978. — 328 с.

10. Био, М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. — Москва: Энергия, 1975. — 208 с.

11. Бранфилева, А. Н. Разработка математических и компьютерных моделей переноса тепла, массы, импульса для систем тепло- и водоснабжения: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / А. Н. Бранфилева. — Москва, 2015. — 172 с.

12. Васютин, М. А. Оценка максимального нагрева пленки NbN токовым импульсом при низких температурах на основе уравнения теплопроводности / М. А. Васютин, Е. В. Данилова, Н. Д. Кузьмичев // Теплофизика и аэромеханика. — 2022. — Т. 29, № 3. — С. 473–480.

13. Габдушев, Р. Ж. Разработка и совершенствование методов расчёта термоупругости элементов паровых котлов ТЭС: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Р. Ж. Габдушев. — Иваново, 2001. — 20 с.

14. Глазунов, Ю. Т. Вариационные методы / Ю. Т. Глазунов. — Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. — 470 с.

15. Григорьев, Л. Я. Инженерные задачи нестационарного теплообмена / Л. Я. Григорьев, О. Н. Маньковский. — Ленинград: Энергия, 1968. — 83 с.

16. Гудмен, Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена / Т. Гудмен // Проблемы теплообмена: сборник научных трудов. — Москва: Атомиздат, 1967. — С. 41–96.

17. Долгих, В. Д. Исследование тепловых характеристик пиролитического реактора генерации водорода из метана / В. Д. Долгих, В. А. Кудинов, Н. Р. Беляков // Известия вузов. Физика. — 2023. — Т. 66, № 11. — С. 17–25.

18. Дутта, Д. Математическая модель температурного поля, возникающего при дуговой сварке под флюсом / Д. Дутта // Прикладная механика и техническая физика. — 2024. — Т. 65, № 3. — С. 74–82.

19. Ерёмин, А. В. Математическое моделирование процессов переноса с учетом конечной и бесконечной скорости распространения потенциалов исследуемых полей: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / А. В. Ерёмин. — Самара, 2019. — 240 с.

20. Ерёмин, А. В. Теплообмен в жидкости с учетом диссипации энергии / А. В. Ерёмин, И. В. Кудинов, А. И. Довгялло, В. А. Кудинов // Инженерно-физический журнал. — 2017. — Т. 90, № 5. — С. 1298–1306.

21. Ерёмин, А. В. Разработка численно-аналитических методов решения задач гидродинамики и теплообмена на основе параболических и гиперболических уравнений: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / А. В. Ерёмин. — Самара, 2013. — 187 с.

22. Жуковский, В. С. Основы теплопередачи / В. С. Жуковский. — Москва; Ленинград: Госэнергоиздат, 1960. — 211 с.

23. Зарубин, В. С. Инженерные методы теплопроводности / В. С. Зарубин. — Москва: Энергоатомиздат, 1983. — 328 с.

24. Иванов, А. В. Операционное решение задач теплопроводности для слоисто-однородных тел / А. В. Иванов // Инженерно-физический журнал. — 1958. — Т. 1, № 2. — С. 13–21.

25. Карелин, В. А. Математическая модель переноса тепла в слое диэлектрика при СВЧ-облучении / В. А. Карелин, В. В. Саломатов // Теплофизика и аэромеханика. — 2023. — Т. 30, № 2. — С. 375–380.

26. Карелин, В. А. Построение приближенных аналитических решений для модели переноса тепла в слое льда при СВЧ-облучении / В. А. Карелин, В. В. Саломатов // Теплофизика и аэромеханика. — 2023. — Т. 30, № 6. — С. 1189–1196.

27. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. — Москва: Наука, 1964. — 487 с.

28. Кудинов, И. В. Исследование термонапряженного состояния реактора для получения водорода из метана / И. В. Кудинов, А. А. Пименов, Г. В. Михеева // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 1. – С. 162–174.

29. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. — Москва: Высшая школа, 2001. — 550 с.

30. Карташов, Э. М. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости / Э. М. Карташов, В. А. Кудинов. — Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 360 с.

31. Коздоба, Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Л. А. Коздоба. — Москва: Наука, 1975. — 144 с.

32. Кот, В. А. Метод взвешенной температурной функции / В. А. Кот // Инженерно-физический журнал. — 2016. — Т. 89, № 1. — С. 183–202.

33. Кот, В. А. Определение граничных функций на основе систем интегральных тождеств для взвешенной температурной функции / В. А. Кот // Сборник научных трудов. — Минск: ИТМО, 2015. — С. 242–251.

34. Котова, Е. В. Математическое моделирование процессов теплопроводности и термоупругости с переменными свойствами среды численно-аналитическими методами: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Е. В. Котова. — Самара, 2013. — 181 с.

35. Метод дополнительных искомых функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды / Е. В. Котова, А. В. Еремин, В. А. Кудинов [и др.] // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. — 2019. — № 2. — С. 59–70.

36. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач теплопроводности с переменным начальным условием на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк // Инженерно-физический журнал. — 2007. — Т. 80, № 3. — С. 27–35.

37. Кудинов, В. А. Решения задач теплопроводности при переменных во времени граничных условиях на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк // Известия Российской академии наук. Энергетика. — 2007. — № 1. — С. 55–68.

38. Кудинов, В. А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк. — Москва: Высшая школа, 2008. — 305 с.

39. Анализ нелинейной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк, С. А. Назаренко // Теплофизика высоких температур. — 2006. — Т. 44, № 5. — С. 577–585.

40. Метод координатных функций в несимметричных задачах теплопроводности / В. А. Кудинов, В. В. Дикоп, С. А. Назаренко, Е. В. Стефанюк // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. — 2003. — Вып. 22, № 2. — С. 136–141.

41. Кудинов, В. А. Получение аналитического решения задачи Стефана с учётом абляции на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов, А. В. Ерёмин, И. В. Кудинов // Инженерно-физический журнал. — 2012. — Т. 85, № 6. — С. 1332–1342.

42. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: учебное пособие для вузов / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. — Москва: Высшая школа, 2005. — 430 с.

43. Кудинов, В. А. Техническая термодинамика и теплопередача: учебник для вузов / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, Е. В. Стефанюк. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2026. — 533 с.

44. Кудинов, В. А. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / В. А. Кудинов, И. В. Кудинов. — Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2020. — 280 с.

45. Кудинов, В. А. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий / В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк // Инженерно-физический журнал. — 2009. — Т. 82, № 3. — С. 540–558.

46. Кудинов, В. А. Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк // Известия Российской академии наук. Энергетика. — 2008. — № 5. — С. 141–157.

47. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк, М. С. Антимонов // Инженерно-физический журнал. — 2007. — Т. 80, № 4. — С. 178–186.

48. Устройство для получения водорода путем термического разложения углеводородов в реакторе с газовым нагревом: патент на полезную модель RU 217185 U1 / И. В. Кудинов, В. А. Кудинов, Ю. В. Великанова [и др.]. — Заявка № 2022135076; приоритет от 29.12.2022.

49. Кудинов, И. В. Моделирование термического разложения метана и образования твердых углеродных частиц / И. В. Кудинов, А. А. Пименов, Г. В. Михеева // Нефтехимия. — 2020. — Т. 60, № 6. — С. 781–785.

50. Кудинов, И. В. Математическое моделирование процессов теплопроводности и гидродинамики численно-аналитическими методами на основе определения дополнительных граничных условий: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / И. В. Кудинов. — Самара, 2011. — 181 с.

51. Кудинов, И. В. Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями / И. В. Кудинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. — 2016. — № 4 (52). — С. 108–117.

52. Кудинов, И. В. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций / И. В. Кудинов, Е. В. Котова, В. А. Кудинов // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 153–165.

53. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях / И. В. Кудинов, В. А. Кудинов, А. В. Еремин, С. В. Колесников; под ред. Э. М. Карташова. — Санкт-Петербург: Лань, 2005. — 208 с.

54. Кудинов, И. В. Математическое моделирование колебаний газа в реакторе пиролиза метана / И. В. Кудинов, К. В. Трубицын, А. В. Еремин, В. Д. Долгих // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2024. — Т. 28, № 4. — С. 701–717.

55. Колебания твердых тел, жидкостей и газов с учетом локальной неравновесности / И. В. Кудинов, А. В. Еремин, В. В. Жуков [и др.]. — Москва: ИНФРА-М, 2022. — 162 с.

56. Модели термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты / И. В. Кудинов, А. В. Еремин, К. В. Трубицын, Е. В. Стефанюк. — Москва: Проспект, 2020. — 224 с.

57. Кудряшов, Л. И. Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности / Л. И. Кудряшов, Н. Л. Меньших. — Москва: Машиностроение, 1979. — 232 с.

58. Кузнецов, Н. В. Тепловой расчет котельных агрегатов. Нормативный метод / Н. В. Кузнецов, В. В. Митор, И. Е. Дубовский; под ред. Н. В. Кузнецова. – Москва: Эколит, 2020. — 296 с.

59. Лыков, А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена / А. В. Лыков // Инженерно-физический журнал. — 1965. — № 3 (9). — С. 287–304.

60. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — Москва: Высшая школа, 1967. — 600 с.

61. Лыков, А. В. Тепломассообмен: справочник / А. В. Лыков. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Энергия, 1978. — 480 с.

62. Лыков, А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. — Москва; Ленинград: Госэнергоиздат, 1963. — 535 с.

63. Меерович, И. Г. Температурное поле в многослойных системах с переменными теплофизическими свойствами / И. Г. Меерович // Инженерно-физический журнал. — 1967. — Т. 12, № 4. — С. 484–490.

64. Меерович, И. Г. Нестационарное температурное поле в многослойных системах / И. Г. Меерович, Г. Ф. Мучник // Теплофизика высоких температур. — 1963. — № 2. — С. 291–298.

65. Михеев, М. А. Краткий курс теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – Москва: Госэнергоиздат, 1961. — 208 с.

66. Михеев, М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. — Москва: Энергия, 1977. — 343 с.

67. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — Москва: Наука, 1970. — 510 с.

68. Михлин, С. Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий. — Москва: Наука, 1965. — 384 с.

69. Морозов, В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов. — Москва: Наука, 1987. — 240 с.

70. Мукоед, Н. Я. Решение задач теплопроводности в многослойных средах методом суммарных представлений / Н. Я. Мукоед, В. Я. Журавленко // Теплофизика и теплотехника. — Киев: Наукова думка, 1974. — Вып. 26. — С. 110–112.

71. Мучник, Г. Ф. Нестационарная теплопроводность в многослойных средах. 1. Общие решения для плоских систем / Г. Ф. Мучник, И. А. Зайдеман // Инженерно-физический журнал. — 1962. — № 12. — С. 71–76.

72. Мучник, Г. Ф. Нестационарная теплопроводность в многослойных средах. III. Трехслойные и четырехслойные системы / Г. Ф. Мучник, И. А. Зайдеман // Инженерно-физический журнал. — 1963. — Т. 6, № 3. — С. 86–94.

73. Назаренко, С. А. Математическое моделирование теплопроводности с использованием ортогональных методов взвешенных невязок и дополнительных граничных условий: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / С. А. Назаренко. — Ульяновск, 2008. — 166 с.

74. Павлов, К. Ф. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии: учебное пособие для студентов химико-технологических

специальностей высших учебных заведений / К. Ф. Павлов, П. Г. Романков, А. А. Носков. – 10-е изд., перераб. и доп., репр. – Москва: Альянс, 2013. — 575 с.

75. Петухов, Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах / Б. С. Петухов. — Москва: Энергия, 1967. — 412 с.

76. Подстригач, Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — Москва: Наука, 1984. — 368 с.

77. Постольник, Ю. С. Метод осреднения функциональных поправок в задачах теплопроводности / Ю. С. Постольник // Тепло- и массоперенос : сборник трудов. — Минск, 1972. — Т. 8. — С. 23–29.

78. Процюк, Б. В. О решении задач теплопроводности и термоупругости для многослойных тел / Б. В. Процюк // Доклады АН УССР. Серия А. — 1977. — № 11. — С. 1019–1021.

79. Рид, Р. Свойства газов и жидкостей / Р. Рид, Т. Шервуд. — Ленинград: Химия, 1971. — 702 с.

80. Ройзен, Л. И. Приближенный метод исследования задач теплопроводности многослойных тел / Л. И. Ройзен // Теплофизика высоких температур. — 1981. — Т. 19, № 4. — С. 821–831.

81. Саломатов, В. В. К расчёту теплопроводности при нестационарном коэффициенте теплообмена / В. В. Саломатов, Э. И. Гончаров // Известия АН СССР. Серия: Энергетика и транспорт. — 1986. — № 6. — С. 154–159.

82. Самарский, А. А. Численные методы: учебное пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Тулин. — Москва: Наука, 1979. — 430 с.

83. Спэрроу, Е. М. Исследования нестационарного и стационарного процессов теплопроводности в телах произвольной формы с произвольно заданными начальными условиями / Е. М. Спэрроу, А. Хаджи-Шейх // Теплопередача. — 1968. — № 1. — С. 109–115.

84. Стефанюк, Е. В. Модельные представления аналитических решений краевых задач теории теплообмена на основе введения дополнительных граничных условий: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Е. В. Стефанюк. — Москва, 2010. — 337 с.

85. Стефанюк, Е. В. Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности / Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов // Теплофизика высоких температур. — 2009. — Т. 47, № 2. — С. 250–262.

86. Тёмкин, А. Г. Обратные методы теплопроводности / А. Г. Тёмкин. — Москва: Энергия, 1973. — 464 с.

87. Темников, А. В. Современные методы математического моделирования и решения задач теплопроводности: учебное пособие / А. В. Темников. — Куйбышев: Издательство Куйбышевского политехнического института, 1984. — 90 с.

88. Темников, А. В. Приближенные методы решения задач теплопроводности / А. В. Темников, В. И. Игонин, В. А. Кудинов. — Куйбышев: Издательство Куйбышевского авиационного института, 1982. — 89 с.

89. Теория тепломассообмена: учебник для вузов / под ред. А. И. Леонтьева. — Москва: Высшая школа, 1979. — 495 с.

90. Теплотехнический справочник: в 2 т. Т. 2 / под ред. В. Н. Юренева, П. Д. Лебедева. — Москва: Энергия, 1976. — 897 с.

91. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — Москва: Наука, 1979. — 569 с.

92. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. — 659 с.

93. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — Москва: Издательство МГУ, 1999. — 798 с.

94. Ткачев, В. К. Гидродинамика и теплообмен в жидкости при зависимости вязкости от температуры / В. К. Ткачев, А. В. Еремин, Р. М. Клеблеев, И. В. Кудинов // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. — 2019. — № 2 (23). — С. 69–79.

95. Федоров, Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики / Ф. М. Федоров. — Новосибирск: Наука, 2000. — 220 с.

96. Формалев, В. Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах: обзор / В. Ф. Формалев // Теплофизика высоких температур. — 2001. — Т. 39, № 5. — С. 810–832.

97. Формалев, В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи / В. Ф. Формалев. — Москва: Физматлит, 2015. — 280 с.

98. Фортов, В. Е. Энергетика в современном виде / В. Е. Фортов, О. С. Попель. — Москва: Издательский дом «Интеллект», 2011. — 168 с.

99. Цирельман, Н. М. Прямые и обратные задачи тепломассопереноса / Н. М. Цирельман. — Москва: Энергоатомиздат, 2005. — 392 с.

100. Цой, П. В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса / П. В. Цой. — Москва: Энергия, 1971. — 382 с.

101. Цой, П. В. Системные методы расчёта задач тепломассопереноса / П. В. Цой. — Москва: Издательство МЭИ, 2005. — 568 с.

102. Чарный, И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И. А. Чарный. — Москва: Недра, 1975. — 296 с.

103. Шашков, А. Г. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход / А. Г. Шашков, В. А. Бубнов, С. Ю. Яновский. — 2-е изд., доп. — Москва: URSS, 2004. — 296 с.

104. Швец, М. Е. О приближённом решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя / М. Е. Швец // Прикладная математика и механика. — 1949. — Т. 13, № 3. — С. 257–266.

105. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. — Москва: Наука, 1969. — 472 с.

106. Шумаков, И. В. Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов / И. В. Шумаков. — Москва: Атомиздат, 1979. — 216 с.

107. Юдаев, Б. Н. Основы теплопередачи: учебник для вузов / Б. Н. Юдаев. — Москва: Высшая школа, 1981. — 319 с.

108. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. — Новосибирск: Наука, 1987. — 95 с.

109. Яновский, С. Ю. Некоторые закономерности образования отложений на гладких и оребренных поверхностях нагрева, охлаждаемых органическими теплоносителями / С. Ю. Яновский // Теплоэнергетика. — 1991. — № 3. — С. 59–60.

110. Яновский, С. Ю. Теплоотдача при вынужденном течении в обогреваемых трубах углеводородных топлив сверхкритического давления / С. Ю. Яновский, Б. Я. Каменецкий // Инженерно-физический журнал. — 1991. — Т. 60, № 1. — С. 45–50.

111. Alvi, N. Peristalsis of nonconstant viscosity Jeffrey fluid with nanoparticles / N. Alvi, T. Latif, Q. Hussain, S. Asghar // Results in Physics. — 2016. — Vol. 6. — P. 1109–1125.

112. Askar, S. Transient experimental investigation of airside heat transfer in a crossflow heat exchanger / S. Askar, S. Fotowat, A. Fartaj // Applied Thermal Engineering. — 2021. — Vol. 199. — Article 117516.

113. Cai, L. An efficient method for estimating time-varying convective heat transfer coefficient based on boundary condition transfer technique / L. Cai, Y. Li, G. Wang [et al.] // International Communications in Heat and Mass Transfer. — 2023. — Vol. 144. — Article 106787.

114. Eremin, A. V. Method for Solving the Problem of Heat Transfer in a Flat Channel / A. V. Eremin, K. V. Gubareva // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 2096, № 1. — Article 012089.

115. Eremin, A. V. One Method of Heat Transfer Process Mathematical Modeling in Solids / A. V. Eremin, N. P. Krasnova // 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). — IEEE, 2019. — P. 1–5.

116. Ghosh, D. Numerical investigation on latent heat thermal energy storage in a phase change material using a heat exchanger / D. Ghosh [et al.] // Heat Transfer. — 2021. — Vol. 50, № 5. — P. 4289–4308.

117. Hasona, W. M. Combined effects of magnetohydrodynamic and temperature dependent viscosity on peristaltic flow of Jeffrey nanofluid through a porous medium: applications to oil refinement / W. M. Hasona, A. A. El-Shekhipi, M. G. Ybrahim // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2018. — Vol. 126. — P. 700–714.

118. Kot, V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: Neumann Condition / V. A. Kot // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2018. — Vol. 91, № 2. — P. 445–470.

119. Liu, C. S. Analytic series solutions of 2D forward and backward heat conduction problems in rectangles and a new regularization / C. S. Liu, C. W. Chang // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2020. — Vol. 28, № 10. — P. 1384–1406.

120. Makinde, O. D. MHD Couette-Poiseuille flow of variable viscosity nanofluids in a rotating permeable channel with Hall effect / O. D. Makinde, T. Iskander, F. Mabood [et al.] // Journal of Molecular Liquids. — 2016. — Vol. 221. — P. 778–787.

121. Pashchenko, D. Heat flow inside a catalyst particle for steam methane reforming: CFD-modeling and analytical solution / D. Pashchenko, A. Eremin // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2021. — Vol. 165. — Article 120617.

122. Rashedi, K. A meshfree regularization method for recovering a time-dependent Robin coefficient in one-dimensional transient heat conduction / K. Rashedi, F. Baharifard // International Journal of Nonlinear Analysis and Applications. — 2024. — Vol. 15, № 4. — P. 11–22.

123. Reddy, M. G. Magnetohydrodynamic peristaltic transport of Jeffrey nanofluid in an asymmetric channel / M. G. Reddy, O. D. Makinde // Journal of Molecular Liquids. — 2016. — Vol. 223. — P. 1242–1248.

124. Sabry, M. N. Analytic modeling of laminar forced convection in circular duct arbitrary boundary conditions and inlet temperature profile / M. N. Sabry // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2017. — Vol. 112. — P. 933–939.

125. Shah, R. K. Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data / R. K. Shah, A. L. London. — Vol. 1. — Academic Press, 2014. — 492 p.

126. Shahmardan, M. M. An exact analytical solution for convective heat transfer in rectangular ducts / M. M. Shahmardan, M. Norouzi, M. N. Kayhani, A. Amiri Delouei // Journal of Zhejiang University - Science A: Applied Physics & Engineering. — 2012. — Vol. 13. — P. 768–781.

127. Shahmardan, M. M. An analytical solution for fully developed forced convection in triangular ducts / M. M. Shahmardan, M. H. Sedaghat, M. Norouzi // Heat Transfer - Asian Research. — 2015. — Vol. 44, № 6.

128. Yu, Y. Estimation of the boundary condition of a 3D heat transfer equation using a modified hybrid conjugate gradient algorithm / Y. Yu [et al.] // Applied Mathematical Modelling. — 2022. — Vol. 102. — P. 768–785.

Основные публикации автора диссертационной работы

129. Kudinov, V. A. Research of Thermal Explosion Conditions in Nonlinear Heat Conduction Problems with a Nonlinear Heat Source / V. A. Kudinov, K. V. Trubitsyn, K. V. Kolotilkina, S. V. Zaytsev, T. E. Gavrilova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No. 5. — P. 2321–2327.

130. Kolotilkina, K. V. Formation of dynamic and thermal boundary layers in a methane pyrolysis with variable viscosity and thermal diffusivity / K. V. Kolotilkina, S. V. Zaitsev, E. V. Stephanyuk, V. A. Kudinov // Thermophysics and Aeromechanics. – 2026. – Vol. 33, No. 1. – P. 101–107.

131. Зайцев, С. В. Тепловой расчет установки пиролиза метана с метано-водородным нагревом / С. В. Зайцев, К. В. Колотилкина, Е. В. Котова, И. В. Кудинов // Математические методы в технологиях и технике. – 2025. – № 9. — С. 31–34.

132. Зайцев, С. В. Теплоутилизаторы — ключ к эффективному энергосбережению / С. В. Зайцев, К. В. Колотилкина // Актуальные проблемы строительства, ЖКХ и техносферной безопасности : материалы X Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции молодых

исследователей, Волгоград, 24–29 апреля 2023 года / под общ. ред. Н. Ю. Ермиловой, И. Е. Степановой. – Волгоград : ВолгГТУ, 2023. — С. 344–346.

133. Зайцев, С. В. Исследование аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности / С. В. Зайцев, К. В. Колотилкина, И. А. Иванов // Молодежь и наука: шаг к успеху : сборник научных статей 8-й Всероссийской научной конференции перспективных разработок молодых ученых : в 4 т., Курск, 20–21 марта 2025 года. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2025. — С. 58–63.

134. Зайцев, С. В. Исследование решения третьей краевой задачи для гиперболического уравнения теплопроводности / С. В. Зайцев, К. В. Колотилкина, И. А. Иванов // Молодежь и наука: шаг к успеху : сборник научных статей 8-й Всероссийской научной конференции перспективных разработок молодых ученых : в 4 т., Курск, 20–21 марта 2025 года. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2025. — С. 53–57.

135. Колотилкина, К. В. Аналитический подход к нестационарному течению в канале на основе дополнительной искомой функции / К. В. Колотилкина // Бутаковские чтения: сборник статей V Всероссийской с международным участием молодежной конференции, Томск, 9–11 декабря 2025 года. – Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2025. — С. 314–318.

136. Колотилкина, К. В. Оптимизация работы тепловых сетей с учетом тепловых потерь: термодинамический подход и сравнительный анализ / К. В. Колотилкина // Бутаковские чтения: сборник статей IV Всероссийской с международным участием молодежной конференции, Томск, 10–12 декабря 2024 года. – Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2024. – С. 500–503.

137. Колотилкина, К. В. Численно-аналитический метод решения нестационарных задач теплопроводности / К. В. Колотилкина, В. А. Кудинов, К. В. Трубицын, Е. В. Стефанюк // Математические методы в технологиях и технике. – 2025. – № 7. — С. 73–76.

138. Колотилкина, К. В. Граничный метод исследования температурного

состояния стенки реактора пиролиза метана / К. В. Колотилкина // Современные наукоем-кие технологии. – 2026. – № 6 — С. 117–123.

139. Колотилкина, К. В. Моделирование температуры стенки реактора пиролиза метана при переменных во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре среды / К. В. Колотилкина, Е. В. Стефанюк, В. А. Панова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2026. – Т. 30, № 2. — С. 430–448.

140. Колотилкина, К. В. Автоматизированная система управления процессом подогрева нефти в печи / К. В. Колотилкина // Международная научно-техническая конференция молодых ученых БГТУ им. В. Г. Шухова, посвященная 170-летию со дня рождения В. Г. Шухова, Белгород, 16–17 мая 2023 года. – Белгород : Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, 2023. – Ч. 12. — С. 189–193.

141. Колотилкина, К. В. Математическое моделирование системы автоматического регулирования температуры воды на выходе из проточной емкости / К. В. Колотилкина // Бутаковские чтения: сборник статей II Всероссийской с международным участием молодежной конференции, Томск, 13–15 декабря 2022 года. – Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2022. — С. 226–229.

142. Колотилкина, К. В. Оценка результативности применения тепловых утилизаторов в вентиляционных системах с целью оптимизации переноса тепла / К. В. Колотилкина // Бутаковские чтения: сборник статей III Всероссийской с международным участием молодежной конференции, Томск, 12–14 декабря 2023 года. – Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2023. — С. 503–507.

143. Колотилкина, К. В. Применение энергоэффективных калориферов в теплоэнергетике / К. В. Колотилкина // Актуальные проблемы строительства, ЖКХ и техносферной безопасности: материалы XI Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции молодых исследователей, Волгоград, 22–27 апреля 2024 года. – Волгоград: ВолгГТУ, 2024.

— С. 343–345.

144. Колотилкина, К. В. Исследование напряжений в цилиндре, нагруженном внутренним давлением / К. В. Колотилкина, С. В. Зайцев, А. В. Гришин, А. Д. Богомазов // Актуальные проблемы строительства, ЖКХ и техносферной безопасности: материалы XI Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции молодых исследователей, Волгоград, 22–27 апреля 2024 года. – Волгоград: ВолгГТУ, 2024. — С. 341–343.

145. Кудинов, В. А. Формирование нестационарного профиля скорости в плоском канале / В. А. Кудинов, К. В. Трубицын, Т. Е. Гаврилова, К. В. Колотилкина, Е. В. Котова, В. К. Ткачев // Известия вузов. Физика. – 2024. – Т. 67, № 1 (794). — С. 63–72.

146. Трубицын, К. В. Дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности с переменным по координате начальным условием / К. В. Трубицын, Т. Е. Гаврилова, Е. В. Котова, К. В. Колотилкина, С. В. Зайцев, В. А. Кудинов // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2023. – № 6. — С. 88–94.

147. Трубицын, К. В. Получение аналитических решений краевых задач на основе дополнительных граничных условий / К. В. Трубицын, Т. Е. Гаврилова, Е. В. Котова, К. В. Колотилкина, С. В. Зайцев, А. Н. Бранфилева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2024. – № 2. — С. 85–93.

148. Трубицын, К. В. Аналитические решения задач теплопроводности с зависящими от времени граничными условиями / К. В. Трубицын, Е. В. Котова, Т. Е. Гаврилова, К. В. Колотилкина, С. В. Зайцев, В. А. Кудинов // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. – 2023. – № 3 (326). — С. 57–64.

149. Трубицын, К. В. Дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности с неоднородными граничными условиями / К. В. Трубицын, Е. В. Котова, Т. Е. Гаврилова, К. В. Колотилкина, С. В. Зайцев, Т. Б. Тарабрина // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2023. – № 4. — С. 89–96.

Приложение А

Акты о внедрении результатов диссертации

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по научной работе
ФГБОУ ВО «Самарский
государственный технический
университет»

_____ А.В. Еремин
11.02.2026

«УТВЕРЖДАЮ»
Генеральный директор
ООО «Газпромнефть –
Промышленные инновации»

_____ М.В. Никулин
18.02.2026

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Результаты научно – исследовательской работы (НИР) ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»: никель - содержащий катализатор для процесса каталитического пиролиза метана; составы расплавов металла для наиболее благоприятных условий проведения процесса термического пиролиза; катализаторы для плазмохимического пиролиза метана для условий низкотемпературной активации (нагрева) плазмой с прямой инжекцией катализатора в зону реакции и промежуточным носителем энергии внедрены и используются на базе ООО «Газпромнефть – Промышленные инновации».

Работа выполнялась по договору между ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» и ООО «Газпромнефть – Промышленные инновации» на тему «Разработка базовых решений по технологиям производства «бирюзового» водорода из природного газа» (№ ГПИ-22/08000/00209/Р от 07.11.2022 г.).

Назначение внедренной продукции

– получение водорода и структурированных углеродных наноматериалов в процессе каталитического пиролиза метана в газовой фазе;

– увеличение активности состава расплава металлов для получения высокого выхода водорода и решение проблемы зауглероживания катализатора;

– увеличение выхода водорода и структурированности углеродного продукта в процессе плазмохимического пиролиза метана на плазме барьерного разряда;

– математическое моделирование тепловых процессов и энергетической эффективности реакторов производства водорода и углерода.

Эффективность внедрения

1. Организационно – технические преимущества:

– полученные результаты могут быть использованы как при проведении экспериментальных работ по генерации водорода из метана, так и в ходе конструкторских работ по разработке новых экспериментальных и пилотных реакторов;

– возможно внедрение результатов НИР при масштабировании технологических решений в области пиролиза метана в жидкометаллических и газовых средах, а также в плазмохимических реакторах;

– выполненная работа позволит проводить исследования процессов пиролиза, опираясь на полученные в НИР теоретические и экспериментальные результаты, что позволит сохранить материальные и временные ресурсы при проведении дальнейших экспериментальных и опытно-промышленных работ, а также при масштабировании указанных технологий пиролиза метана.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

От ООО «Газпромнефть – Промышленные инновации»

Заместитель генерального директора по НИОКР

_____ К.А. Овчинников

Руководитель направления по развитию проектов по новым материалам и продуктам

_____ М.В. Попов

Старший научный сотрудник

_____ М.В. Чудакова

От Самарского государственного технического университета:

Доктор техн. наук, профессор

_____ И.В. Кудинов

Кандидат техн. наук, доцент

_____ Е.В. Котова

Аспирант

_____ Т.Ф. Амиров

Аспирант

_____ В.Д. Долгих

Аспирант

_____ А.В. Пашин

Аспирант

_____ С.В. Зайцев

Аспирант

_____ Е.В. Керосиров

Аспирант

_____ И.А. Жук

Аспирант

_____ К.В. Колотилкина

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор-проректор по учебной работе
ФГБОУ ВО «Самарский государственный
технический университет», д.э.н. доцент
_____ Д.Е. Овчинников
«18» Мая 2026

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Колотилкиной Ксении Владимировны на тему «Разработка численно – аналитических методов математического моделирования тепломассопереноса в реакторах термического разложения метана» в учебном процессе Самарского государственного технического университета

Настоящий акт составлен о том, что в учебном процессе для студентов теплоэнергетического факультета в рамках образовательных программ магистратуры направления подготовки 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» используются следующие результаты диссертационной работы Колотилкиной К. В. на тему «Разработка численно – аналитических методов математического моделирования тепломассопереноса в реакторах термического разложения метана»:

1) Численно – аналитические решения математических моделей для задач:

- исследования теплообмена в реакторах пиролиза метана;
- расчета температурного состояния стенки реактора пиролиза метана при несимметричных граничных условиях третьего рода;
- расчета калориферов глубокого охлаждения газов, уходящих из печи реактора пиролиза метана;
- определения мощности внутреннего источника тепла.

2) Комплекс программ, реализующих численно – аналитические методы решения краевых задач теплопроводности.

Использование указанных материалов диссертационной работы позволяет:

- ознакомить обучающихся с этапами математического моделирования реальных физических процессов и особенностями применения численно-аналитических методов к нелинейным задачам теплопроводности;

- научить обучающихся получать решения нелинейных краевых задач с использованием дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций, что повышает точность приближенных аналитических методов;
- обеспечить овладение обучающимися методикой исследования теплового и динамического пограничных слоёв при переменной вязкости газа и несимметричных граничных условиях третьего рода;
- привлечь обучающихся к научной работе в области математического моделирования процессов тепломассопереноса в реакторах пиролиза и расчета калориферов при выполнении курсовых проектов и работ, а также выпускных квалификационных работ.

Декан ТЭФ
к.э.н., доцент  К.В. Трубицын

Приложение Б

Патенты на изобретения, связанные с тематикой диссертационной работы



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2835314

Опытно-промышленная установка для непрерывного получения водорода и графита путем пиролиза метана

Патентообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет" (RU)***

Авторы: ***Кудинов Игорь Васильевич (RU), Зайцев Сергей Владимирович (RU), Колотилкина Ксения Владимировна (RU), Кудинов Василий Александрович (RU), Амиров Тимур Фархадович (RU), Долгих Виктор Дмитриевич (RU), Керосиров Евгений Валерьевич (RU), Пименов Андрей Александрович (RU)***

Заявка № **2024120050**
Приоритет изобретения **17 июля 2024 г.**
Дата государственной регистрации
в Государственном реестре изобретений
Российской Федерации **24 февраля 2025 г.**
Срок действия исключительного права
на изобретение истекает **17 июля 2044 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2840120

Способ непрерывного получения водорода и графита путем пиролиза метана

Патентообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет" (RU)***

Авторы: ***Кудинов Игорь Васильевич (RU), Зайцев Сергей Владимирович (RU), Колотилкина Ксения Владимировна (RU), Кудинов Василий Александрович (RU), Амиров Тимур Фархадович (RU), Долгих Виктор Дмитриевич (RU), Керосиров Евгений Валерьевич (RU), Пименов Андрей Александрович (RU)***

Заявка № **2024132090**
Приоритет изобретения **25 октября 2024 г.**
Дата государственной регистрации
в Государственном реестре изобретений
Российской Федерации **19 мая 2025 г.**
Срок действия исключительного права
на изобретение истекает **25 октября 2044 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат [illegible]
Владелец: Зубов Юрий Сергеевич
Действителен с [illegible] по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

Приложение В

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025663271

Программный комплекс для численно-аналитического решения задач исследования условий теплового взрыва в нелинейных системах теплопроводности

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Колотилкина Ксения Владимировна (RU), Зайцев Сергей Владимирович (RU), Кудинов Василий Александрович (RU)***

Заявка № **2025660264**
Дата поступления **28 апреля 2025 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***27 мая 2025 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат
Владелец: Зубов Юрий Сергеевич
Действителен с 03.10.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2026661484

Цифровой двойник процесса пиролиза углеводородного сырья

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Крюков Юрий Александрович (RU), Керосиров Евгений Валерьевич (RU), Васин Денис Александрович (RU), Кутузов Иван Алексеевич (RU), Зайцев Сергей Владимирович (RU), Колотилкина Ксения Владимировна (RU)***

Заявка № **2026619794**

Дата поступления **08 апреля 2026 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***22 апреля 2026 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 00a570e81[illegible]d3f531b4b8818e75f29506
Владелец: Зубов Юрий Сергеевич
Действителен с 04.[illegible].2025 по 28.11.2026

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2026668971

Определение площади теплообменной поверхности калорифера по параметрам теплоносителей

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Колотилкина Ксения Владимировна (RU), Стефанюк Екатерина Васильевна (RU)***

Заявка № **2026669939**

Дата поступления **24 июня 2026 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***08 июля 2026 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 00a570e4f7ad8d531b4b8818e75f29506
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 04.03.2025 по 28.11.2026

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2026669048

Определение мощности внутреннего источника тепла по температурному отклику

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Колотилкина Ксения Владимировна (RU), Стефанюк Екатерина Васильевна (RU)***

Заявка № **2026669542**

Дата поступления **18 июня 2026 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***09 июля 2026 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 00a570e4f7aad3c531b4b8818e75f29506
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 04.09.2025 по 28.11.2026

Ю.С. Зубов